



# **ZBIRKA ZADATAKA IZ MEHANIZAMA POLJOPRIVREDNIH MAŠINA**

**Doc. dr Marko Kostić  
Prof. dr Radojka Gligorić**



**UNIVERZITET U NOVOM SADU  
POLJOPRIVREDNI FAKULTET**

**Novi Sad, 2019.**

## **EDICIJA „POMOĆNI UDŽBENIK“**

### **Osnivač i izdavač Edicije:**

*Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu  
Trg Dositeja Obradovića 8  
21000 Novi Sad*

### **Godina osnivanja:**

*1954.*

### **Glavni i odgovorni urednik Edicije:**

*Dr Nedeljko Tica, redovni profesor,  
dekan Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu*

### **Članovi Komisije za izdavačku delatnost:**

*Dr Ljiljana Nešić, redovni profesor*

*Dr Branislav Vlahović, redovni profesor*

*Dr Milica Rajić, redovni profesor*

*Dr Nada Plavša, vanredni profesor*

CIP-Каталогизација у публикацији  
Библиотеке Матице српске, Нови Сад

ISBN 978-86-7520-456-5

**Autori:**

Dr Marko Kostić, docent, Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu  
Dr Radojka Gligorić, redovni profesor, Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom  
Sadu

**Glavni i odgovorni urednik:**

Dr Nedeljko Tica, redovni profesor,  
dekan Poljoprivrednog fakulteta Univerziteta u Novom Sadu

**Urednik:**

Dr Marko Kostić, docent,  
Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu

**Tehnički urednik:**

Dr Marko Kostić, docent,  
Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu

**Izrada crteža i unos teksta:**

Dr Marko Kostić, docent,  
Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu

**Recenzenti:**

Dr Miodrag Zlokolica, profesor emeritus  
Fakultet tehničkih nauka Univerziteta u Novom Sadu

Dr Dragi Radomirović, redovni profesor,  
Poljoprivredni fakultet Univerziteta u Novom Sadu

**Izdavač:**

Univerzitet u Novom Sadu, Poljoprivredni fakultet

**Zabranjeno preštampavanje i fotokopiranje. Sva prava zadržava izdavač.**

**Štampanje odobrio:**

Komisija za izdavačku delatnost  
Poljoprivrednog fakulteta u Novom Sadu

**Tiraž:**

20

**Mesto i godina izdavanja:**

Novi Sad, 2019. god.

## **PREDGOVOR**

Mehanizmi se u svakom pomenu često vezuju samo za mehaniku odnosno mašine. Zapravo, sve pojave kojima smo okruženi dešavaju se po zakonitostima uzročno posledičnih relacija između aktera ma na kom nivou se one dešavale. Stoga, razumevanjem ponašanja i uslova funkcionisanja mehanizama mehaničkih sistema, otvaraju se novi vidici u tumačenju objektivne realnosti ponašanja bilo kog drugog prirodnog kompleksa.

ZBIRKA ZADATAKA IZ MEHANIZAMA POLJOPRIVREDNIH MAŠINA je pomoćni udžbenik, prevenstveno namenjen studentima druge godine Poljoprivrednog fakulteta, Univerziteta u Novom Sadu, studijskog programa Poljoprivredna tehnika. Sadržaj i obim zbirke uskladen je sa nastavnim planom i programom predmeta „Mehanizmi poljoprivrednih mašina“. Osnovni motiv za pisanje zbirke je potreba da se kompletira udžbenička literatura za pomenuti predmet pomoću koje će studenti lakše moći da usvajaju znanja i polažu ispit. Celokupno gradivo zbirke prati sadržaj osnovnog udžbenika „Mehanizmi poljoprivrednih mašina“ autora Radojke Gligorić. Autori su pokušali da na logički povezan način i što vizuelnije objasne problematiku i metod rešavanja zadataka. Na početku svakog poglavlja data su sažeta uputstva o baznim principima i pravilima koja se studenti moraju poznavati pre nego što se uđe u postupak rešavanja. Postavke zadataka su u velikoj meri pojednostavljene kako bi se skrenula pažnja na suštinu u rešavanju, a to je tehnika.

Zahvaljujemo se recenzentima na detaljnem pregledu građe i datim sugestijama.

Autori.

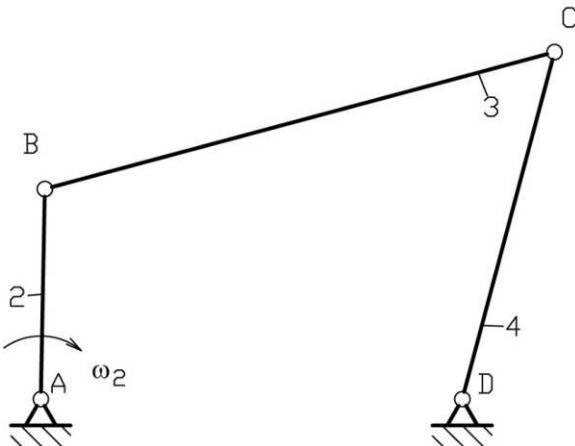
## **Sadržaj**

1.	<i>Položaji i putanje tačaka mehanizma .....</i>	1
2.	<i>Određivanje kinematičkih parametara metodom plana brzina i ubrzanja.....</i>	7
3.	<i>Određivanje kinematičkih parametara kliznih parametara metodom proširenja .....</i>	36
4.	<i>Određivanje kinematičkih parametara po asuru .....</i>	59
5.	<i>Određivanje pogonske snage .....</i>	70
	<i>Meoda kinetostatičkih pritisaka.....</i>	70
	<i>Metod redukovanih mehanizma .....</i>	77
6.	<i>Određivanje kinematičkih parametara planetarnih penosnika .....</i>	83
7.	<i>Uravnoteženje rotora .....</i>	104
8.	<i>Literatura .....</i>	128

## 1. Položaji i putanje tačaka mehanizma

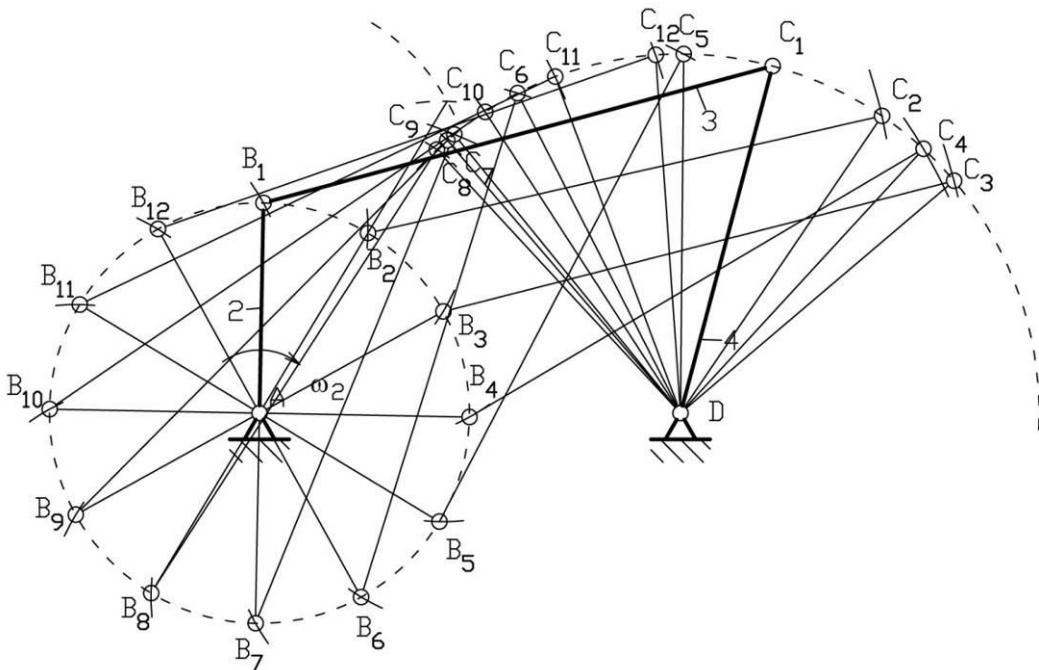
### Zadatak 1.1.

Za prikazani mehanizam odrediti putanje tačaka.

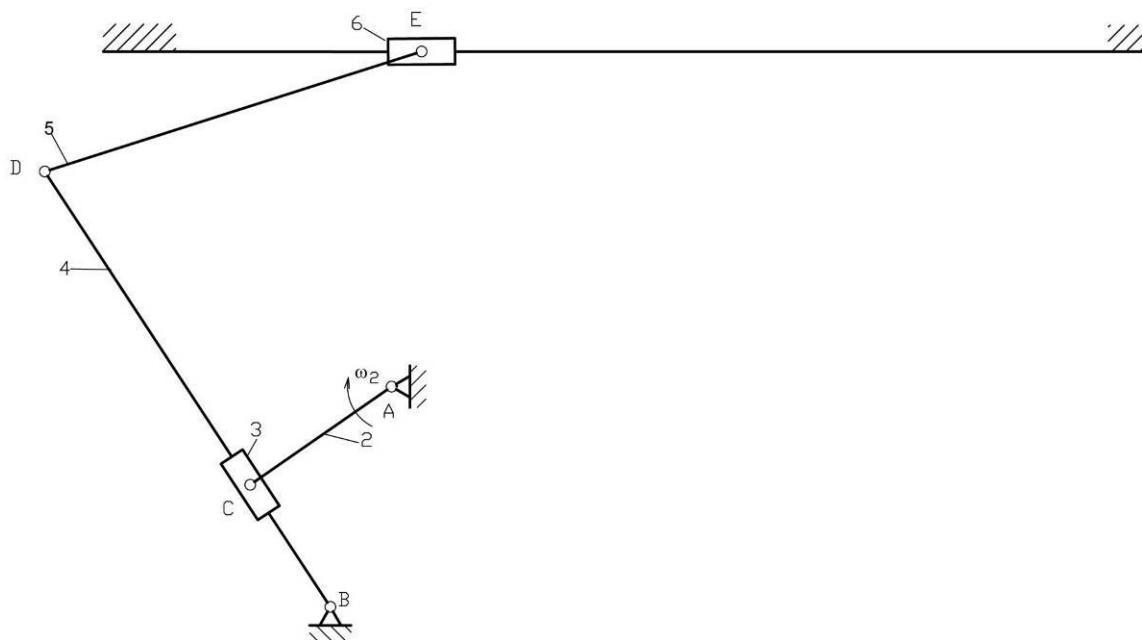


#### Rešenje zadatka

Na primeru jednostavnog četvoropolužnog mehanizma, ali i u slučaju složenih mehanizama, korišćenjem šestara (ili u računarskom programu) opiše se kružnica oko tačke A sa poluprečnikom  $\overline{AB}$ . Da bi se dobile putanje tačaka neophodno je odrediti položaje tačaka mehanizma sa određenim pomakom. Ukoliko se radi tehnikom ručnog crtanja, usvaja se da je dovoljno radni ciklus podeliti na 12 jednakih koraka te se kružnica oko tačke A podeli na 12 jednakih delova. Cilj je da se dobije 12 trenutnih položaja tačke B na pogonskom članu 2 koji se obeleže sa B<sub>1</sub> do B<sub>12</sub>. Prvobitno se kružnica podeli na 6 jednakih delova uz pomoć šestara. Ako se uzme rastojanje u dužini poluprečnika kruga ( $\overline{AB}$ ) i nanese uzastopno počevši od početne tačke B na kružnici, dobiće se 6 jednakih isečaka. Kada se bilo koji od njih podeli na pola dobija se 1/12 dela punog kruga. Prenošenjem dobijenog rastojanja na preostali deo kružnice, dobijaju se položaji tačke B u 12 jednakih vremenskih pomaka (od B<sub>1</sub> do B<sub>12</sub>). Spajanjem tačke A sa tačkama B dobijaju se položaji člana 2. Sledеći korak je opisivanje kružnice oko tačke D sa poluprečnikom koji odgovara rastojanju  $\overline{CD}$  s obzirom da tačka C rotira oko tačke D. Nakon toga se iz svake tačke B prenese rastojanje  $\overline{BC}$  koje je konstantne vrednosti, na kružnicu oko tačke D što će dati novih 12 položaja tačke C. Spajanjem trenutnih položaja tačaka za različite trenutke dobijaju se putanje tačaka. Kada se rekonstruiše mehanizam spajanjem položaja karakterističnih tačaka za definisani trenutak, dobijaju se položaji mehanizma kao celine.

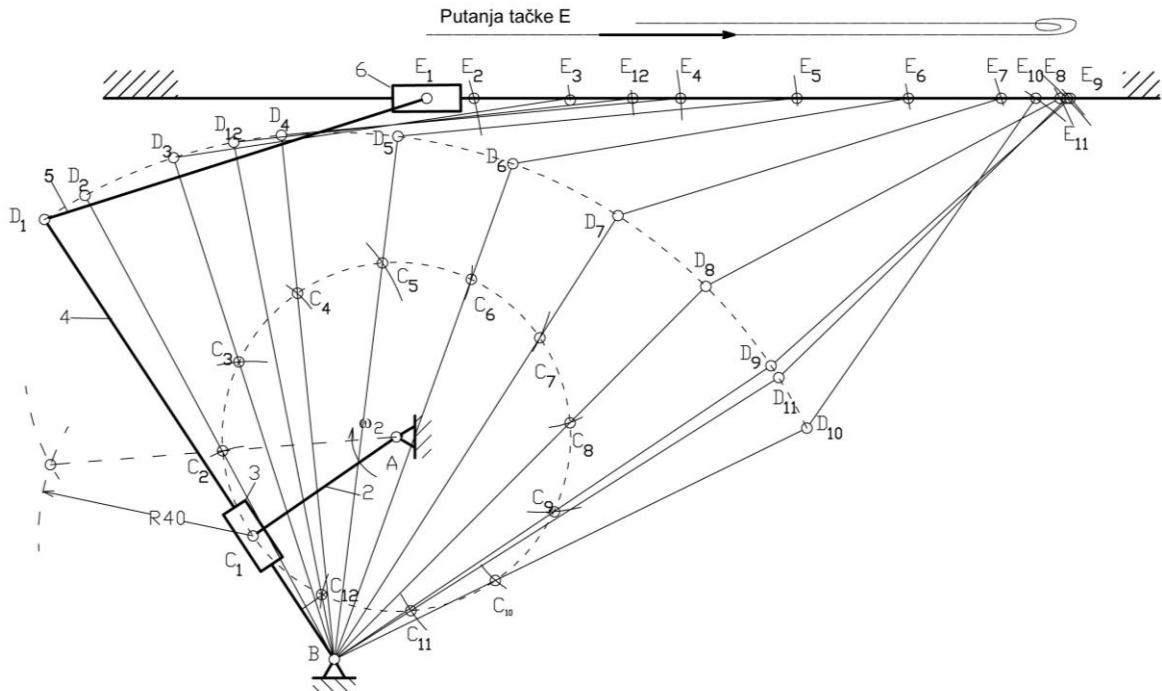
**Zadatak 1.2.**

Za prikazani mehanizam nacrtati putanje naznačenih tačaka.

**Rešenje zadatka**

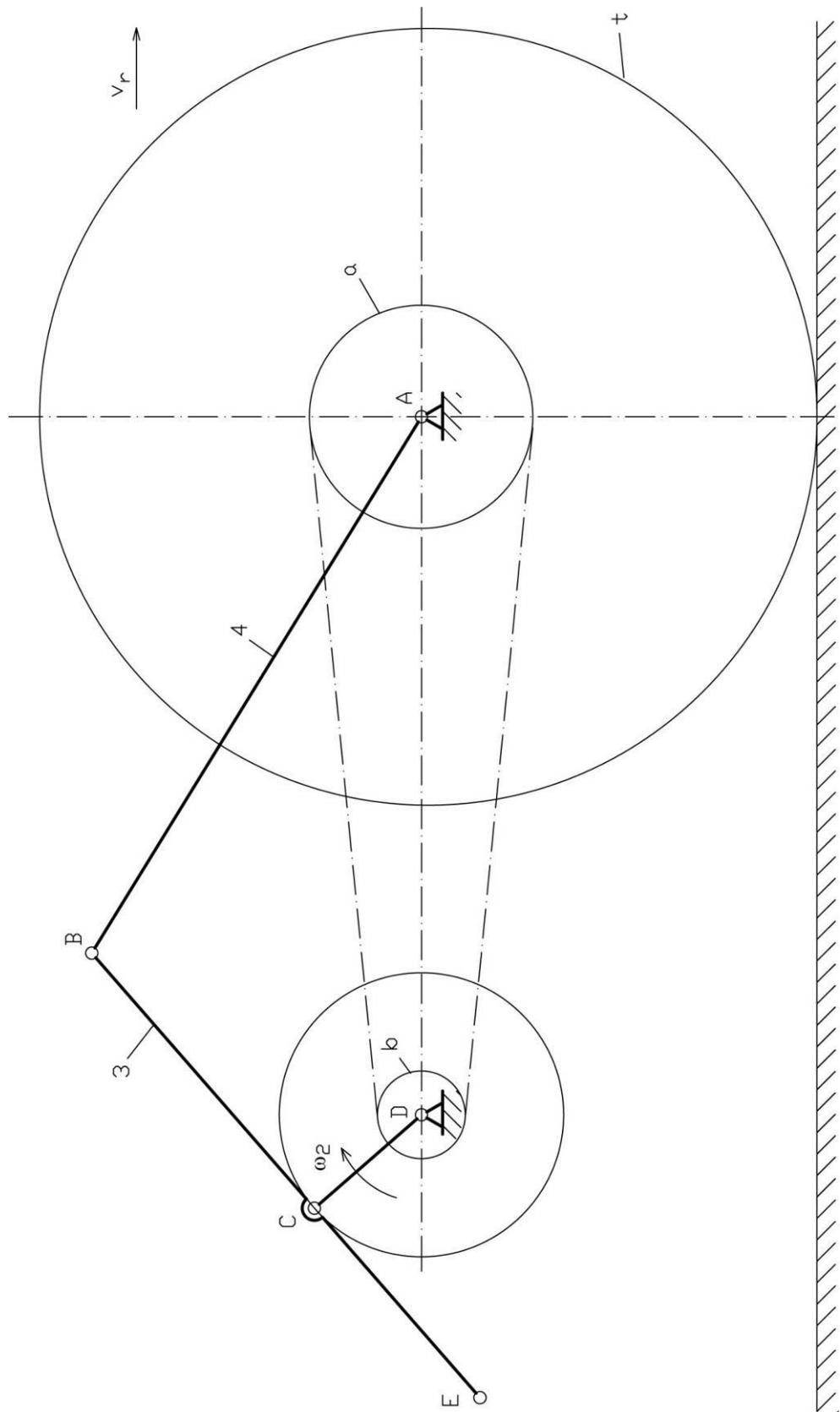
Prvi korak je crtanjem kružnica (putanja) onih tačaka koje imaju kružno kretanje oko nepokretnih oslonaca. Prvo se nacrtava putanja tačke C na pogonskom članu 2. Otvorom šestara koji odgovara rastojanju  $\overline{AC}$  opisuje se kružnica. S obzirom na vrstu međusobnih veza sastavnih članova, član 4 odnosno tačka D, imaće takođe kružno kretanje ali sa smanjenim opsegom, te se crta luk oko tačke oslonca B čiji poluprečnik odgovara rastojanju  $\overline{BD}$ . Nakon toga, kružnica (putanja tačke C) se podeli na jednak broj delova. Najpodesnije je, ukoliko se radi šestarom, da se kružnica podeli na 12 jednakih delova što će dati dovoljan broj trenutnih pozicija tačaka na osnovu kojih će se definisati trajektorije za jedan ceo ciklus. Označe se

tačke sa C<sub>1</sub>, C<sub>2</sub>,...,C<sub>12</sub> koje predstavljaju trenutne položaje člana 2. Štap  $\overline{BD}$  je prava koja ima stalnu dužinu i da kliza kroz vođicu 3 u tački C, spajanjem pravaca između tačke B i tačaka C<sub>1</sub> do C<sub>12</sub> dobiće se položaji člana 4 odnosno tačke D. Član 4 i član 6 su povezani štapom 5, a s obzirom da je član 6 klizač koji ide po definisanom pravcu (vođici) i da znamo položaje tačke D, prenošenjem dužina člana 5  $\overline{DE}$  na pravac klizanja člana 6, dobijaju se preseci koji predstavljaju položaje tačke E<sub>1</sub> do E<sub>12</sub>. Na kraju se povežu sve dobijene tačke trenutnih položaja sa odgovarajućim tačkama koje pripadaju istom članu kako bi se dobili svi položaji mehanizma. Putanje se dobijaju spajanjem položaja istih tačaka u različitim položajima.



### Zadatak 1.3.

Za prikazani mehanizam prevrtiča sena odrediti putanje tačke E pri kretanju. Poznati podaci su:  $U_L = \frac{10\text{cm}}{2\text{cm}}$ ,  $R_t = 0,32\text{m}$ ,  $R_a = 0,09\text{m}$ ,  $R_b = 0,09\text{m}$ ,  $v_R = 3\frac{\text{m}}{\text{s}}$ .



### Rešenje zadatka

U ovom zadatku će se određivanje putanje tačke E raditi u dve faze. Prva faza podrazumeva da se odrede putanje tačaka mehanizma za slučaj bez translatornog pomeranja

prevrtača sena, a nakon toga će se položajima tačke E dodati komponenta translacije. Prva faza će se uraditi kao u prethodnim zadacima. Prvo će se odrediti položaji pogonske tačke C koja ima putanju po kružnici poluprečnika  $\overline{DC}$ . Potom će se ista kružnica podeliti na 12 jednakih delova. Nakon toga, odrediće se položaji tačaka B i E korišćenjem poznatih rastojanja tačaka na istom članu i da je putanja tačke E deo kružnice AB. Rezultat prve faze je da će putanja tačke E biti elipsa. U drugoj fazi se iz svake tačke E povuče pravac translacije na kojem će se nanositi pomeraji za odgovarajuće vremenske intervale. Pomeraj, kao rezultat kretanja prevrtača sena određuje se na sledeći način.

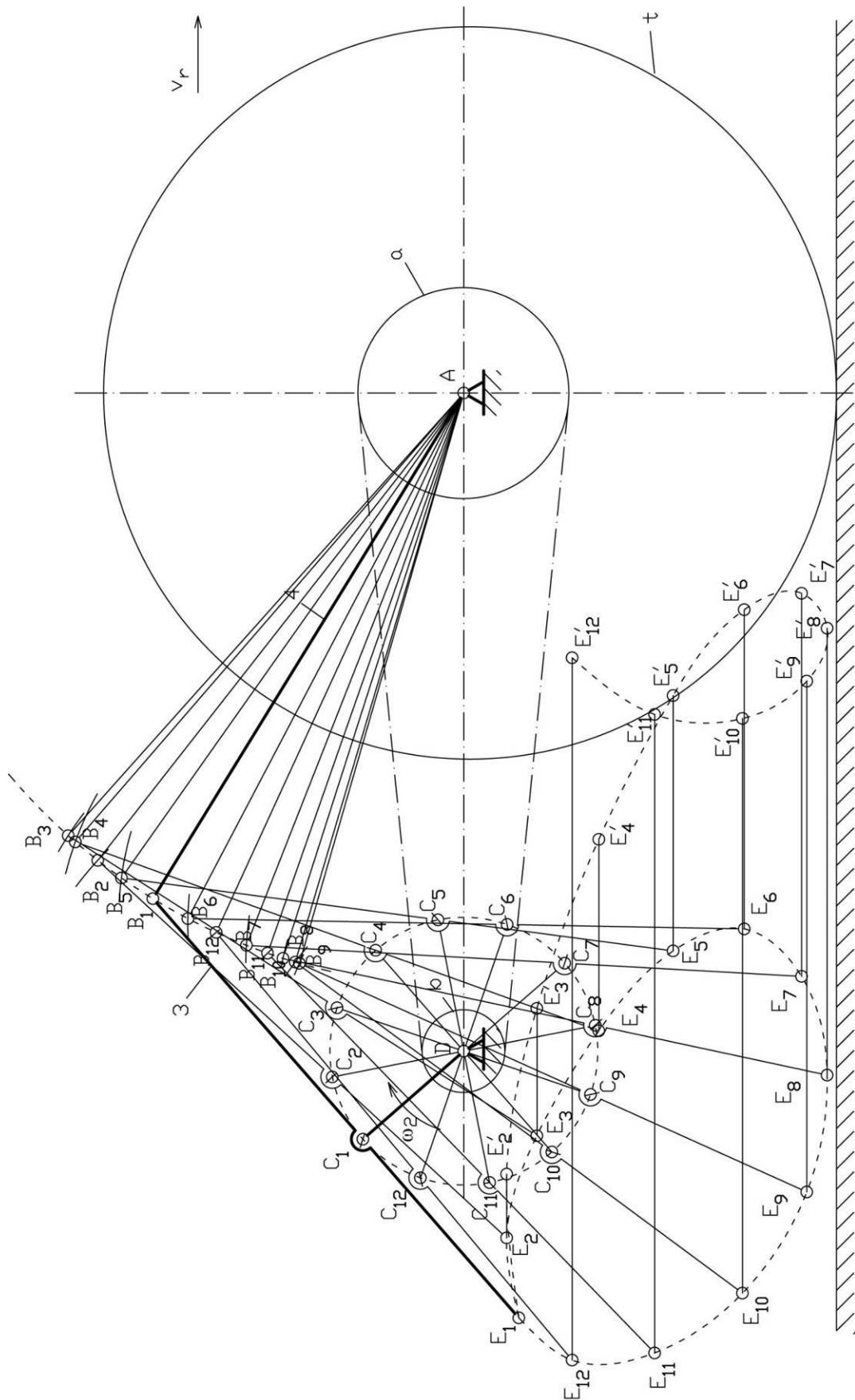
Ako se zna da je poluprečnik pogonskog točka  $R_t = 0,32\text{m}$  onda se na osnovu poznate prenosne brzine  $v_r = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  može odrediti ugao brzina točka  $\omega_t$  kao

$$\omega_t = \frac{v_r}{R_t} = \frac{3 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,32 \text{m}} = 9,375 \text{s}^{-1}. \quad \text{Na osnovu prenosnog odnosa } i = \frac{\omega_a}{\omega_b} = \frac{R_b}{R_t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \omega_b = \frac{\omega_a \cdot R_a}{R_b} = \frac{9,375 \text{s}^{-1} \cdot 0,09 \text{m}}{0,03 \text{m}} = 28,125 \text{s}^{-1} \text{ jer je } \omega_a = \omega_t. \quad \text{Da bi se odredio pređeni put}$$

u pravcu kretanja za svaki položaj tačke E, neophodno je odrediti vremenski interval između svakog susednog položaja tačke. Na osnovu poznate ugaone brzine lančanika b može se odrediti vreme jednog obrta tačke C kao  $t_c = \frac{\Phi_b}{\omega_b} = \frac{2\pi}{28,125 \text{s}^{-1}} = 0,2235 \text{s}$  jer je  $\omega_2 = \omega_b$ . S obzirom da je ciklus podeljen na 12 jednakih delova, vreme jednog perioda je  $t'_c = t_c / 12 = 0,0186 \text{s}$ . Pređeni put u pravcu kretanja između susednih tačaka za vreme jednog perioda se dobija kao  $S' = v_r \cdot t' = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot 0,0186 \text{s} = 0,0558 \text{m}$ . Kada se dobije vrednost

pređenog puta za jedan period, mogu se korigovati položaji tačke E u odnosu na prenosno kretanje celokupnog mehanizma. Ako se uzme da je tačka  $E_1$  trenutni položaj mehanizma, za svaki naredni period od  $t'_c$  tačka E se translatorno pomera u pravcu kretanja za  $N$  perioda  $\cdot S'$ . Na ovaj način se dobija stvarna putanja tačke E u toku rada mehanizma i kretanja prevrtača sena po pravolinijskom putu. Daljim kretanjem prevrtača sena, putanje tačke E se ponavljaju i nadovezuju.

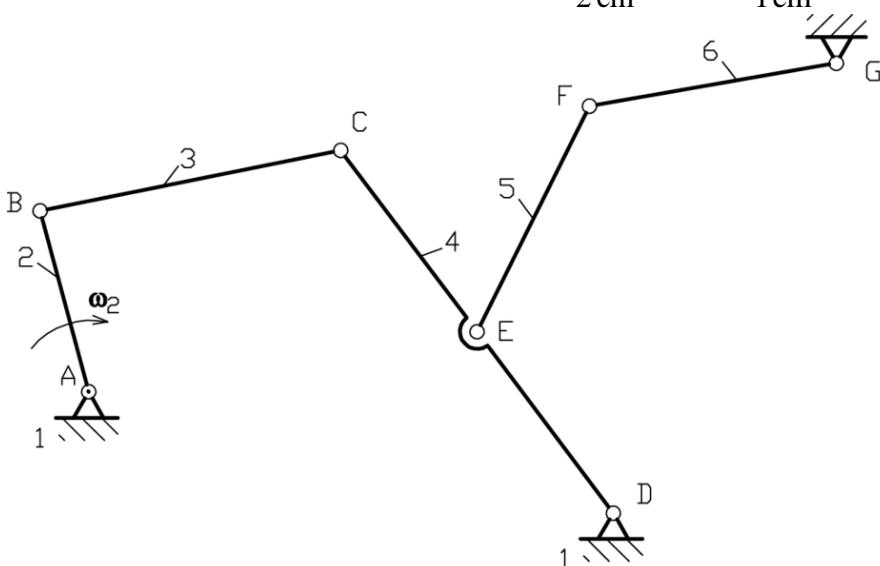


## 2. Određivanje kinematičkih parametara metodom plana brzina i ubrzanja

### Zadatak 2.1.

Geometrijski podaci mehanizma dati su na kinematičkoj šemi nacrtanoj u razmeri  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ . Pogonski član 2 se obrće jednolikom ugaonom brzinom  $\omega_2 = 15 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti brzinu tačke F, ubrzanje tačke E i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 4. Preporučene

razmere za crtanje plana brzina i ubrzanja su  $U_v = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{10 \text{ m/s}^2}{1 \text{ cm}}$ .



### Rešenje zadatka

Geometrijski parametri mehanizma:

$$\overline{AB} = 2,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 25 \text{ cm} = 0,25 \text{ m},$$

$$\overline{BC} = 4,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 41 \text{ cm} = 0,41 \text{ m},$$

$$\overline{CD} = 6,05 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 60,5 \text{ cm} = 0,605 \text{ m},$$

$$\overline{CE} = 3,02 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 30,2 \text{ cm} = 0,302 \text{ m},$$

$$\overline{ED} = 3,02 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 30,2 \text{ cm} = 0,302 \text{ m},$$

$$\overline{EF} = 3,26 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 32,6 \text{ cm} = 0,326 \text{ m},$$

$$\overline{FG} = 3,34 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 33,4 \text{ cm} = 0,334 \text{ m}.$$

Jednačine za brzine:

1.  $v_B = \overline{AB} \cdot \omega_2 = 0,25 \text{ m} \cdot 15 \text{ s}^{-1} = 3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\vec{v}_B \perp BA$ ,
2.  $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C$ ,  $\vec{v}_C \perp BC$ ,  
 $\vec{v}_C \perp CD$ ,
3.  $\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{P_v c}}{\overline{ce}} \Rightarrow \overline{ce} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{P_v c}}{\overline{CD}} = \frac{3,025 \text{ cm} \cdot 8,297 \text{ cm}}{6,05 \text{ cm}} = 4,15 \text{ cm}$ ,
4.  $\vec{v}_F = \vec{v}_E + \vec{v}_F$ ,  $\vec{v}_F \perp FE$ ,
5.  $\vec{v}_F = \vec{v}_G + \vec{v}_F$ ,  $\vec{v}_F \perp FG$ .

Intenziteti brzina:

Razmera za crtanje plana brzina je  $U_v = \frac{1 \text{ m/s}}{2 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti brzina:

$$v_C = \overline{P_v c} \cdot U_v = 8,3 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 4,15 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 4,15 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,07 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_F = \overline{P_v f} \cdot U_v = 4,6 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m/s}}{2 \text{ cm}} = 2,3 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^B = \overline{cb} \cdot U_v = 3,1 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m/s}}{2 \text{ cm}} = 1,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugaona brzina člana 4 je

$$\omega_4 = \frac{v_C}{DC} = \frac{4,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,605 \text{ m}} = 6,86 \text{ s}^{-1}.$$

Smer ugaone brzine i smer obimne brzine je isti.

Jednačine za ubrzanja:

1.  $a_B = \overline{AB} \cdot \omega_2^2 = 0,25 \cdot 15^2 = 56,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , gde je  $\vec{a}_B \parallel AB$  u smeru ka tački A,

6.  $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct} \Rightarrow a_{Cn}^B = \frac{(v_C^B)^2}{CB} = \frac{1,55^2}{0,4} = 6,05 \text{ m} \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , smer je od C ka B,

$$\vec{a}_C^B \perp CB,$$

7.  $\vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}$ ,  $a_{Cn}^D = \frac{(v_D^D)^2}{CD} = \frac{4,15^2}{0,605} = 28,47 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ , smer je od tačke C ka D

$$\vec{a}_C^D \perp CD,$$

8.  $\frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{P_a c}}{\overline{ce}} \Rightarrow c' e' = \frac{CE \cdot P_a c'}{CD} = \frac{0,302 \text{ m} \cdot 3,3 \text{ cm}}{0,605 \text{ m}} = 1,65 \text{ cm}.$

Intenziteti ubrzanja:

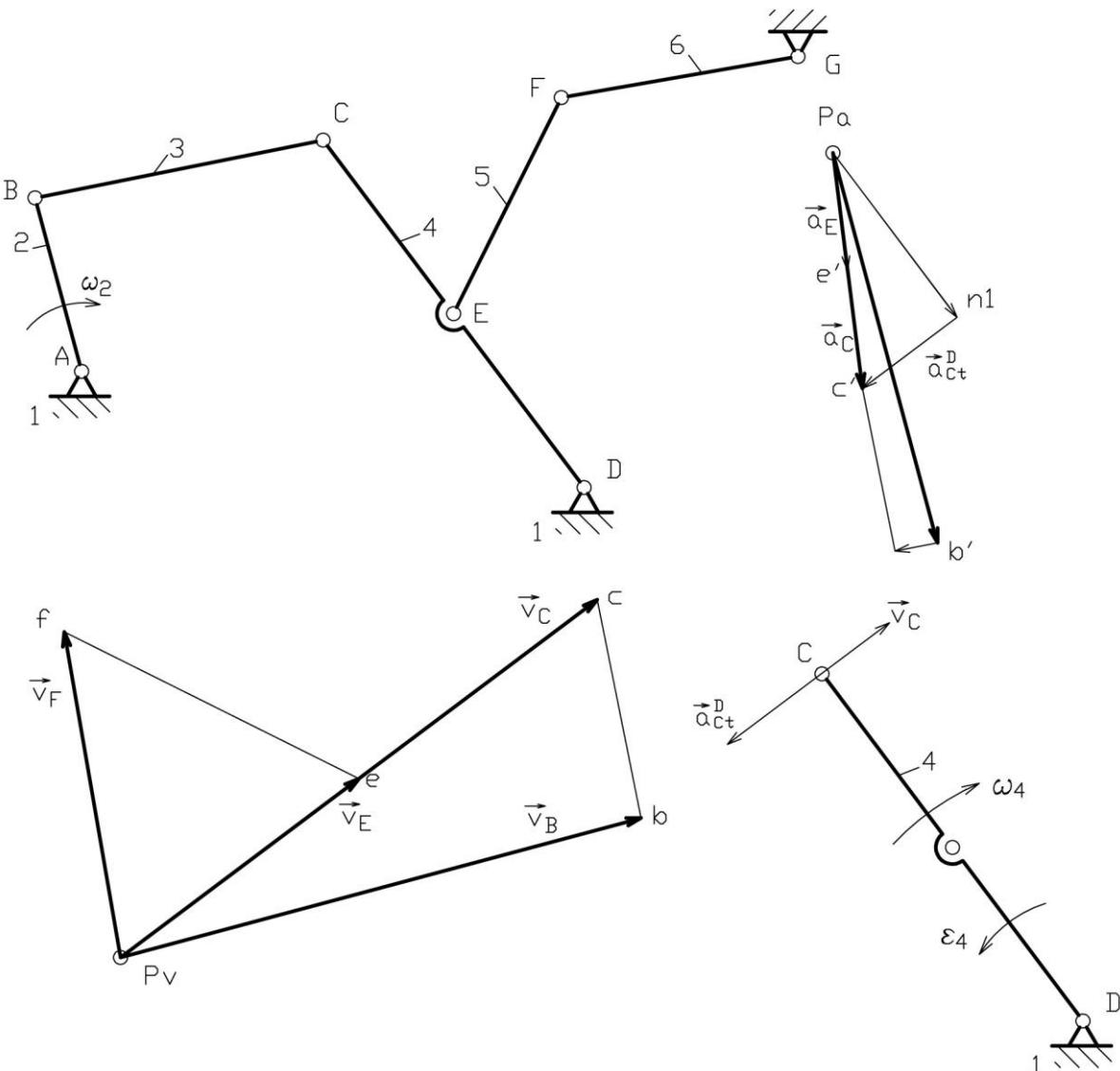
Razmera za crtanje plana brzina je  $U_a = \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuje intenzitet ubrzanja tačke E:

$$a_E = \overline{P_a e} \cdot U_a = 1,653 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 16,53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ugaono ubrzanje člana 4:

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{Ct}^D}{CD} = \frac{16,45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,6 \text{ m}} = 27,42 \text{ s}^{-2}, \text{ smer je u smeru tangencijalnog ubrzanja } a_{Ct}^D,$$

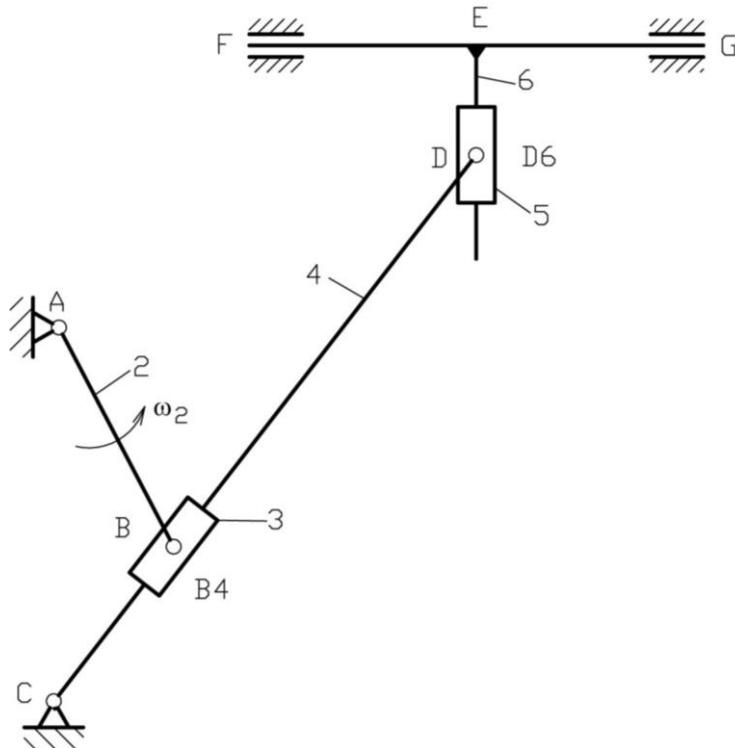
$$a_{Ct}^D = \overline{n_1 c} \cdot U_a = 1,645 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 16,45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



**Zadatak 2.2.**

Za prikazani mehanizam dato je:  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ ,  $\omega_2 = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ . Odrediti brzinu i ubrzanje tačke E, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 4. Preporučene razmere su:

$$U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}}.$$

**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma:

$$\overline{AB} = 3,27 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 32,7 \text{ cm} = 0,327 \text{ m},$$

$$\overline{BC} = 2,58 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 25,8 \text{ cm} = 0,258 \text{ m},$$

$$\overline{CD} = 9,12 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 91,2 \text{ cm} = 0,912 \text{ m},$$

$$\overline{BD} = 6,54 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 65,4 \text{ cm} = 0,654 \text{ m},$$

$$\overline{ED} = 1,44 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 14,4 \text{ cm} = 0,144 \text{ m}.$$

Jednačine za brzine

$$1. v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,327 \text{ m} \cdot 20 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 6,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_B \perp BA,$$

$$2. \vec{v}_{B4} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B4}, \quad \vec{v}_{B4} \parallel CD,$$

$$3. \vec{v}_{B4} = \vec{v}_C + \vec{v}_{B4}, \quad \vec{v}_{B4} \perp BC,$$

$$4. \frac{\overline{CD}}{\overline{CB4}} = \frac{P_v d}{P_v b_4}, P_v d = \frac{\overline{CD} \cdot P_v b_4}{\overline{CB4}} = \frac{91,25 \text{ mm} \cdot 26 \text{ mm}}{25,84 \text{ mm}} = 82,26 \text{ mm},$$

$$5. \vec{v}_{D6} = \vec{v}_D + \vec{v}_{D6}^D, \vec{v}_{D6}^D // D6E,$$

$$6. \vec{v}_{D6} // FG,$$

$$7. \vec{v}_{D6} = \vec{v}_E.$$

Intenzitet brzina

$$\text{Razmara za plan brzina je } U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}, \text{ iz kojeg su određuju intenziteti brzina:}$$

$$v_D = \overline{P_v d} \cdot U_v = 9,4 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 9,4 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 7,4 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 7,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

$$\text{Intenzitet ugaone brzine } \omega_4 \text{ je } \omega_4 = \frac{v_D}{DC} = \frac{9,4}{0,91} = 10,33 \text{ s}^{-1}, \text{ a smer je u smeru brzine}$$

tačke D.

Jednačine za ubrzanja

$$\text{Plan ubrzanja se dobija na osnovu jednačina za ubrzanja koristeći razmeru } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}} :$$

$$1. a_B = AB \cdot \omega_2^2 = 0,32 \cdot 20^2 = 128 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \vec{a}_B // AB \text{ u smeru ka tački A},$$

$$2. \vec{a}_{B4} = \vec{a}_B + \vec{a}_k + \vec{a}_{B4}, a_k = 2 \cdot \omega_4 \cdot v_{B4}^B = 2 \cdot 10,33 \text{ s}^{-1} \cdot 5,9 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 121,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\vec{a}_{B4n}^B // B4C,$$

$$3. \vec{a}_{B4} = \vec{a}_C + \vec{a}_{B4n}^C + \vec{a}_{B4t}^C, \text{ gde je: } \vec{a}_{B4n}^C // B4C \text{ od B4 u smeru ka tački C},$$

$$4. a_{B4n}^C = \frac{(v_{B4}^C)^2}{B4C} = \frac{\left(2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,26 \text{ m}} = 26 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \vec{a}_{B4t}^C \perp B4C.$$

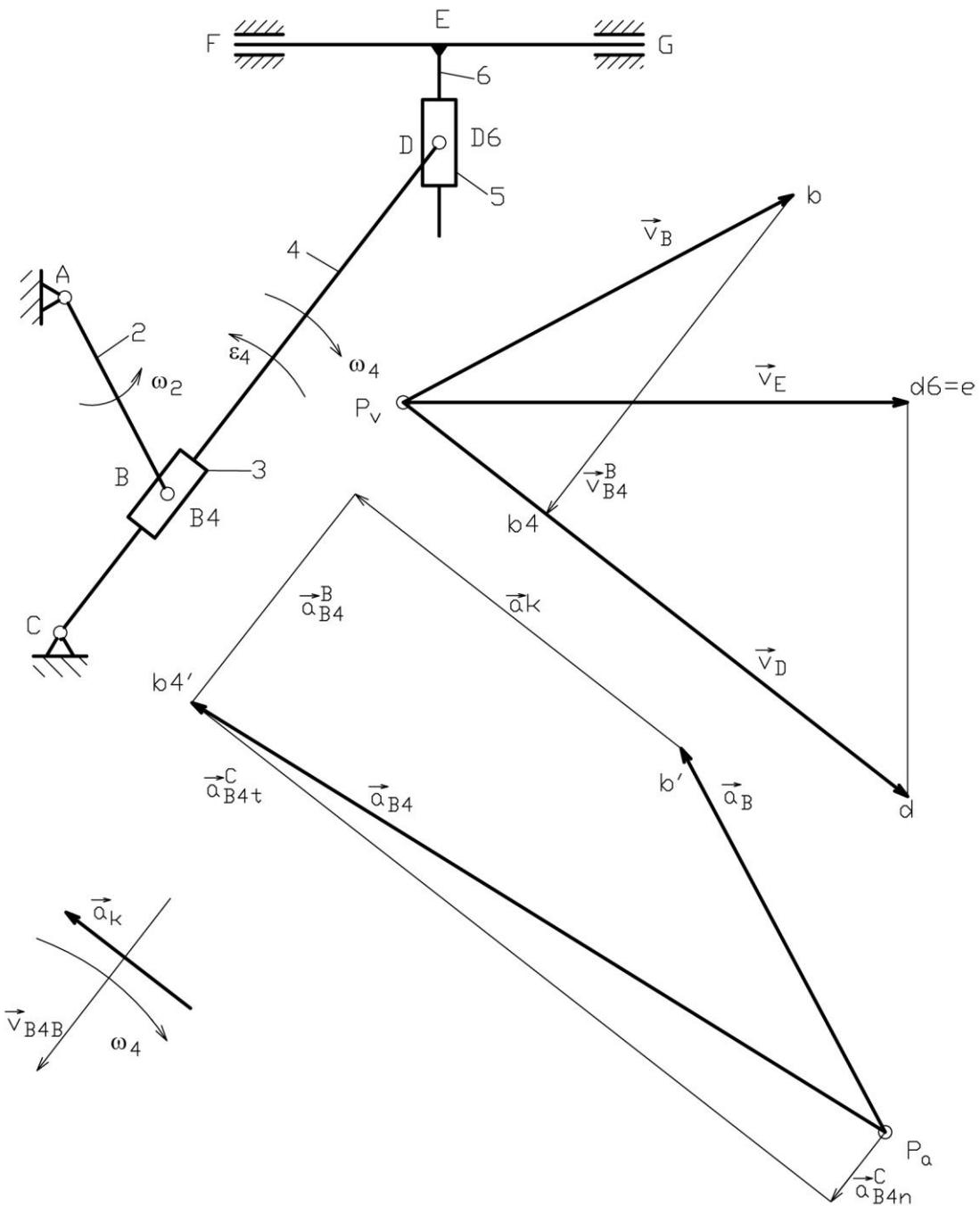
$$\text{Razmara za plan ubrzanja je } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}} \text{ iz kojeg su određuju intenzitet ubrzanja.}$$

Ubrzanje tačke B4 je:

$$a_{B4} = \overline{P_a b_4} \cdot U_a = 12,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}} = 242 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Ugaono ubrzanje člana 4 je

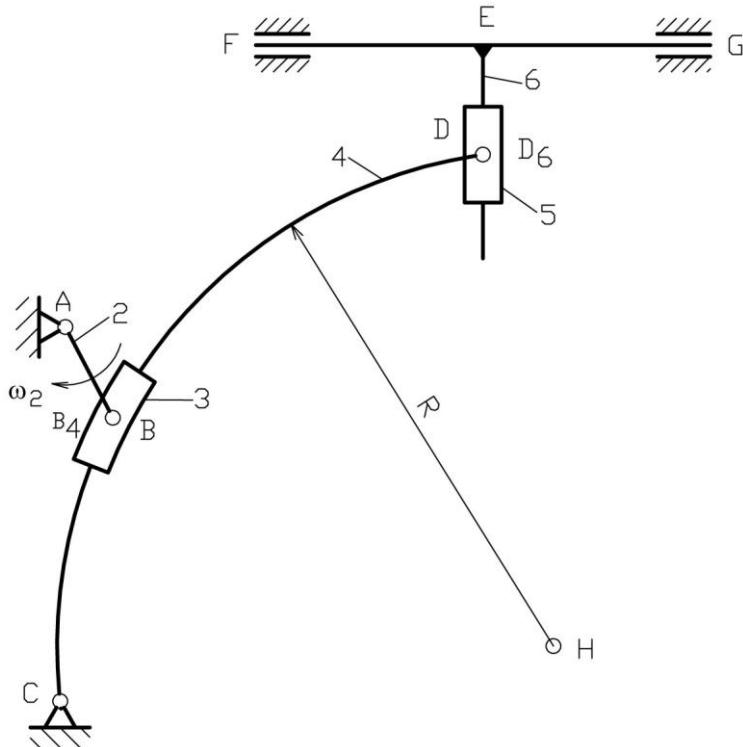
$$\varepsilon_4 = \frac{a_{B4t}^C}{B_4 C} = \frac{242 \frac{m}{s^2}}{0,26 m} = 930,8 \frac{1}{s^2}, \text{ a smer je određen smerom tangencijalnog ubrzanja } a_{B4t}^C$$



**Zadatak 2.3.**

Odrediti brzine i ubrzanja kinematičkih tačaka, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 4.

Dati su podaci:  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ ,  $\omega_2 = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ . Preporučene razmere su:  $U_v = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}$ .

**Rešanje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 1,35 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 13,5 \text{ cm} = 0,135 \text{ m},$$

$$\overline{BC} = 3,8 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 38 \text{ cm} = 0,38 \text{ m},$$

$$\overline{CD} = 9,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 91 \text{ cm} = 0,91 \text{ m},$$

$$\overline{BH} = 6,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 65 \text{ cm} = 0,65 \text{ m},$$

$$\overline{BD} = 6 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 60 \text{ cm} = 0,6 \text{ m},$$

$$\overline{ED} = 1,44 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 14,4 \text{ cm} = 0,144 \text{ m}.$$

Jednačine za brzine

$$1. v_B = \overline{AB} \cdot \omega_2 = 0,135 \text{ m} \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_B \perp BA,$$

2.  $\vec{v}_{B4} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B4}^B, \vec{v}_{B4}^B \perp B4H,$
3.  $\vec{v}_{B4} = \vec{v}_C + \vec{v}_{B4}^C, \vec{v}_{B4}^C \perp BC,$
4.  $\vec{v}_D = \vec{v}_{B4} + \vec{v}_D^{B4}, \vec{v}_D^{B4} \perp DB4,$
5.  $\vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_D^C, \vec{v}_D^C \perp DC,$
6.  $\vec{v}_{D6} = \vec{v}_D + \vec{v}_{D6}^D, \vec{v}_{D6}^D // D6E,$
7.  $\vec{v}_{D6} // FG,$
8.  $\vec{v}_{D6} = \vec{v}_F = \vec{v}_G.$

Intenziteti brzina

$$\text{Razmara za plan brzina je } U_v = \frac{1 \frac{m}{s}}{2 \text{ cm}}, \text{ iz kojeg su određuju intenziteti brzina:}$$

$$v_D = \overline{P_v d} \cdot U_v = 7,7 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{m}{s}}{2 \text{ cm}} = 3,8 \frac{m}{s},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 6,08 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{m}{s}}{2 \text{ cm}} = 3,04 \frac{m}{s}.$$

Ugaone brzine

$$\text{Intenzitet ugaone brzine je } \omega_4 = \frac{v_D}{DC} = \frac{3,8 \frac{m}{s}}{0,91 \text{ m}} = 4,22 \text{ s}^{-1}, \text{ a smer je u smeru brzine } v_D$$

Jednačine za ubrzanja

$$1. a_B = \overline{AB} \cdot \omega_2^2 = 54 \frac{m}{s^2}, \vec{a}_B // \overline{AB} \text{ u smeru ka tački A,}$$

$$2. \vec{a}_{B4} = \vec{a}_B + \vec{a}_k + \vec{a}_{B4n} + \vec{a}_{B4t}, \text{ gde je:}$$

$$a_k = 2 \cdot \omega_4 \cdot v_{B4}^B = 2 \cdot 4,22 \text{ s}^{-1} \cdot 1,75 \frac{m}{s} = 14,8 \frac{m}{s^2}, \text{ smer je određen kao na skici.}$$

$$\text{Ubrzanje } a_{B4n}^B = \frac{(v_{B4}^B)^2}{B4H} = \frac{\left(1,75 \frac{m}{s}\right)^2}{0,65 \text{ m}} = 4,7 \frac{m}{s^2}, \vec{a}_{B4n}^B // B4H \text{ u smeru ka tački H i}$$

$$\vec{a}_{B4t}^B \perp B4H,$$

$$3. \vec{a}_{B4} = \vec{a}_C + \vec{a}_{B4n}^C + \vec{a}_{B4t}^C, \vec{a}_{B4n}^C // B4C \text{ u smeru ka tački C,}$$

$$a_{B4n}^C = \frac{(v_{B4}^C)^2}{B4C} = \frac{\left(1,6 \frac{m}{s}\right)^2}{0,38 \text{ m}} = 6,72 \frac{m}{s^2}, \vec{a}_{B4t}^C \perp B4C,$$

$$4. \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{Dn} + \vec{a}_{Dt}, \text{ gde je } \vec{a}_{Dn} // DC \text{ u smeru od D ka tački C,}$$

$$a_{Dn}^C = \frac{\left(v_D^C\right)^2}{DC} = \frac{\left(3,7 \frac{m}{s}\right)^2}{0,91m} = 15,04 \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_{Dt}^C \perp \overline{DC},$$

5.  $\vec{a}_D = \vec{a}_{B4} + \vec{a}_{Dn}^{B4} + \vec{a}_{Dt}^{B4}$ , gde je  $\vec{a}_{Dn}^{B4} \parallel DB4$  u smeru od D ka tački B4,

$$a_{Dn}^{B4} = \frac{\left(v_D^{B4}\right)^2}{DB_4} = \frac{\left(2,5 \frac{m}{s}\right)^2}{0,6m} = 10,41 \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_{Dt}^{B4} \perp DB4,$$

6.  $\vec{a}_{D6} \parallel FG$ ,

7.  $\vec{a}_{D6} = \vec{a}_D + \vec{a}_{D6}^D$ , gde je  $\vec{a}_{D6}^D \parallel ED4$ .

Intenziteti ubrzanja

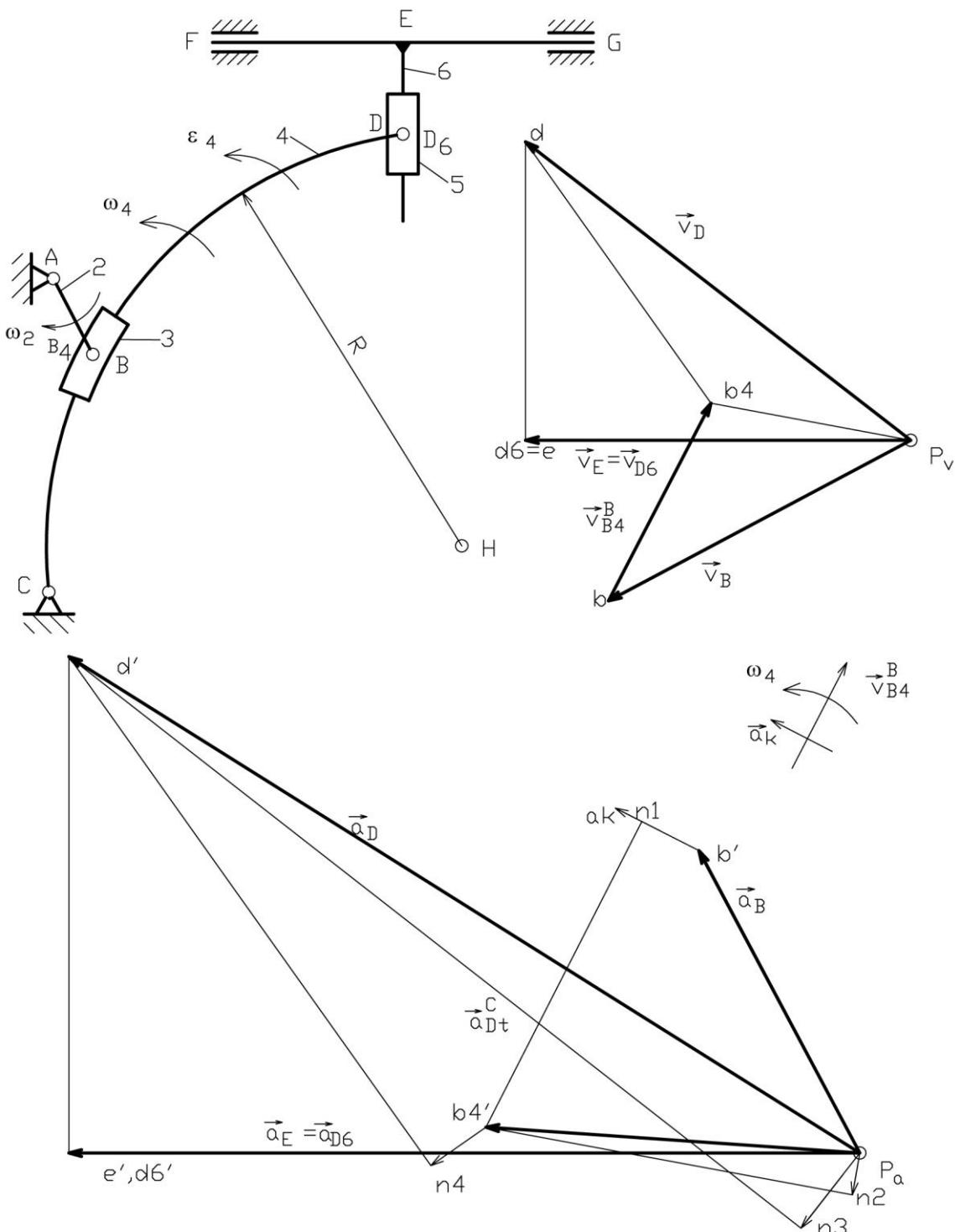
Razmera za plan ubrzanja je  $U_a = \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti ubrzanja:

$$a_D = \overline{P_a d} \cdot U_a = 14,7 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 147 \frac{m}{s^2},$$

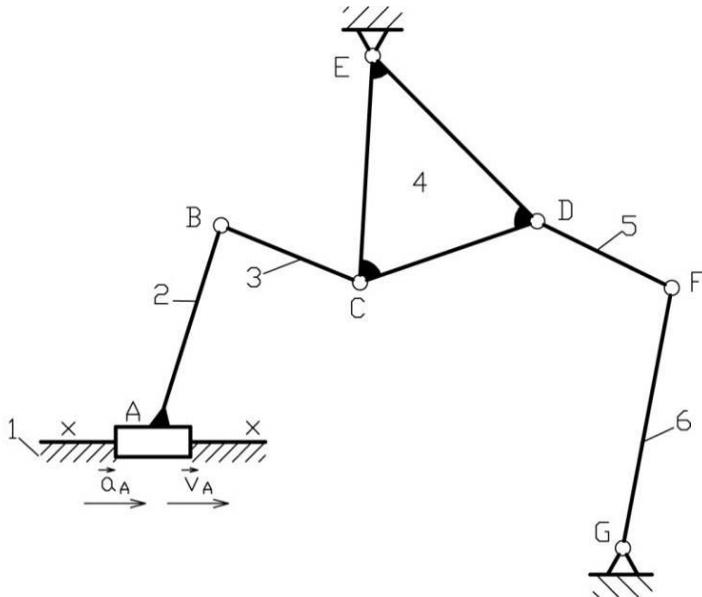
$$a_E = \overline{P_a e} \cdot U_a = 12,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 125 \frac{m}{s^2},$$

Ugaono ubrzanje člana 4 je

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{Dt}^C}{DC} = \frac{147 \frac{m}{s^2}}{0,91m} = 161 s^{-2}, \quad \text{a smer je određen smerom tangencijalnog ubrzanja } \vec{a}_{Dt}^C.$$

**Zadatak 2.4.**

Geometrijski podaci mehanizma dati su na kinematičkoj šemi koja nacrtanoj u razmeri  $U_L = \frac{10\text{ cm}}{1\text{ cm}}$ . Pogonski član 2 ima brzinu  $v_A = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i ubrzanje  $a_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ . Odrediti brzinu i ubrzanje tačke F, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 5. Preporučene razmere su  $U_v = \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1\text{ cm}}$ .

**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma:

$$\overline{BC} = 2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,2 \text{ m},$$

$$\overline{CE} = 3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,3 \text{ m},$$

$$\overline{ED} = 3,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,31 \text{ m},$$

$$\overline{DF} = 2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,2 \text{ m},$$

$$\overline{FG} = 3,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,35 \text{ m}.$$

Jednačine za brzine

$$1. \vec{v}_B = \vec{v}_A,$$

$$2. \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C, \quad \vec{v}_C \perp \overline{CB},$$

$$3. \vec{v}_C \perp \overline{EC},$$

$$4. \vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_D, \quad \vec{v}_D \perp \overline{DC},$$

$$5. \vec{v}_D \perp \overline{DE},$$

$$6. \vec{v}_F = \vec{v}_D + \vec{v}_F, \quad \vec{v}_F \perp \overline{FD},$$

$$7. \vec{v}_F \perp \overline{FG}.$$

Intenziteti brzina

$$v_C = \overline{P_v c} \cdot U_v = 5,9 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,95 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^B = \overline{cb} \cdot U_v = 0,36 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 0,18 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^E = v_C = \overline{P_v c} \cdot U_v = 5,9 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,95 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_D^C = \overline{dc} \cdot U_v = 4,89 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,44 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_D^E = v_D = \overline{P_v d} \cdot U_v = 6,06 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 3,03 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_F^D = \overline{fd} \cdot U_v = 5,20 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_F^G = v_F = \overline{P_v f} \cdot U_v = 2,04 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,02 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugaona brzina člana 5 je

$$\omega_5 = \frac{v_F^D}{FD} = \frac{2,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,2 \text{ m}} = 13 \text{ s}^{-1}, \text{ smer je definisan smerom relativne brzine } \vec{v}_F^D.$$

Jednačine za ubrzanja

$$1. a_B = a_A = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$2. \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}, \vec{a}_{Cn} \parallel CB, \vec{a}_{Ct} \perp CB,$$

$$a_{Cn}^B = \frac{(\overline{v}_C^B)^2}{CB} = \frac{\left(0,18 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,2 \text{ m}} = 0,162 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$3. \vec{a}_C = \vec{a}_E + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}, \vec{a}_{Cn} \parallel CE, \vec{a}_{Ct} \perp CE,$$

$$a_{Cn}^E = \frac{(\overline{v}_C^E)^2}{CE} = \frac{\left(2,95 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,3 \text{ m}} = 29 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$4. \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{Dn} + \vec{a}_{Dt}, \vec{a}_{Dn} \parallel CD, \vec{a}_{Dt} \perp CD,$$

$$a_{Dn}^C = \frac{(\overline{v}_D^C)^2}{DC} = \frac{\left(2,44 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,25 \text{ m}} = 23,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$5. \vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{Dn} + \vec{a}_{Dt}, \vec{a}_{Dn} \parallel ED, \vec{a}_{Dt} \perp DE,$$

$$a_{Dn}^E = \frac{(v_D^E)^2}{DE} = \frac{\left(3,03 \frac{m}{s}\right)^2}{0,31 m} = 29,61 \frac{m}{s^2},$$

6.  $\vec{a}_F = \vec{a}_D + \vec{a}_{Fn} + \vec{a}_{Ft}$ ,  $a_{Fn} // FD$ ,  $\vec{a}_{Ft} \perp FD$ ,

$$a_{Fn}^D = \frac{(v_F^D)^2}{FD} = \frac{\left(2,6 \frac{m}{s}\right)^2}{0,2 m} = 33,8 \frac{m}{s^2},$$

7.  $\vec{a}_F = \vec{a}_G + \vec{a}_{Fn} + \vec{a}_{Ft}$ ,  $a_{Fn} // FG$ ,  $\vec{a}_{Ft} \perp FG$ ,

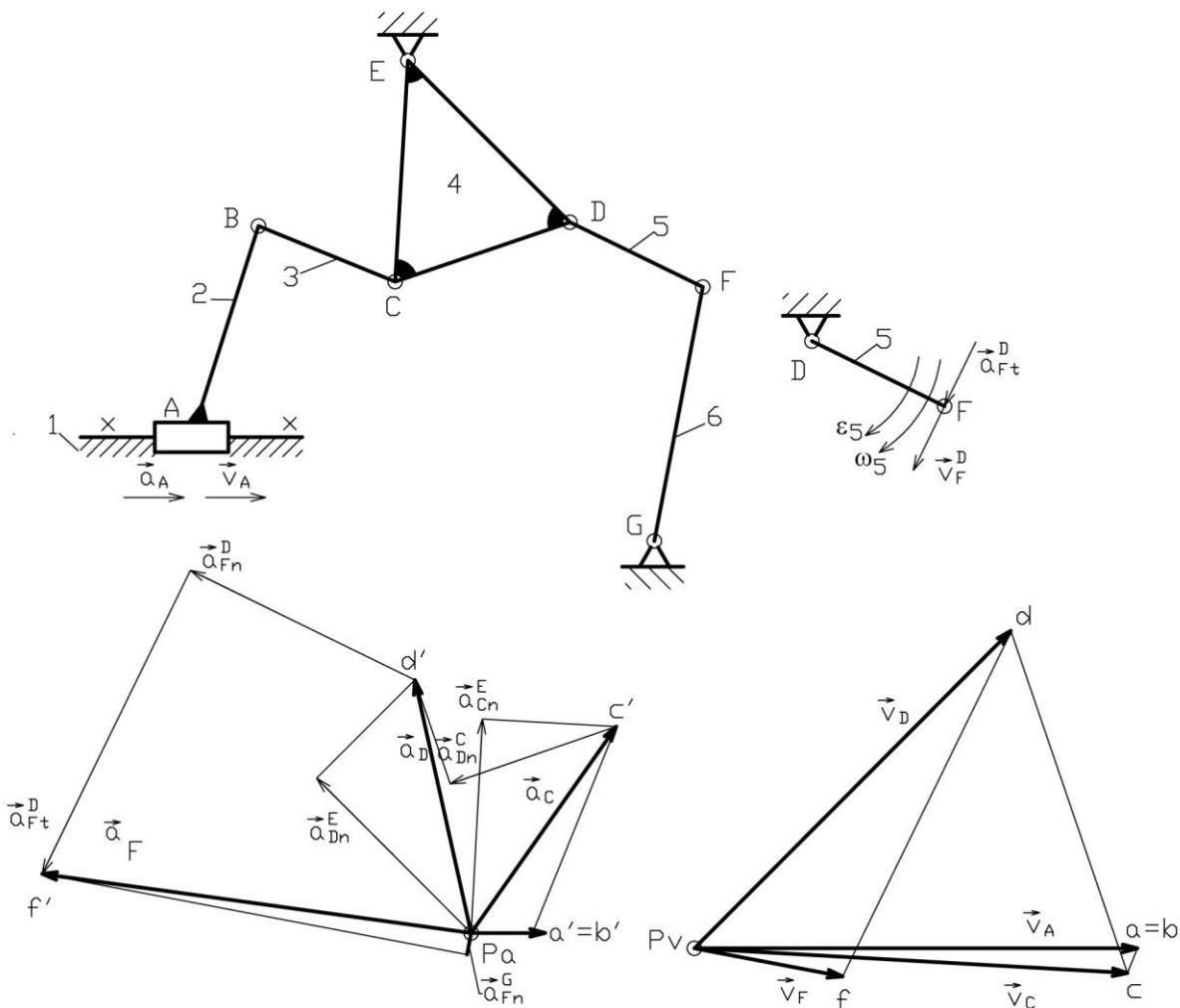
$$a_{Fn}^G = \frac{(v_F^G)^2}{FG} = \frac{\left(1,02 \frac{m}{s}\right)^2}{0,35 m} = 2,97 \frac{m}{s^2}.$$

Intenziteti ubrzanja

$$a_F = \overline{P_a f} \cdot U_a = 5,862 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 58,62 \frac{m}{s^2},$$

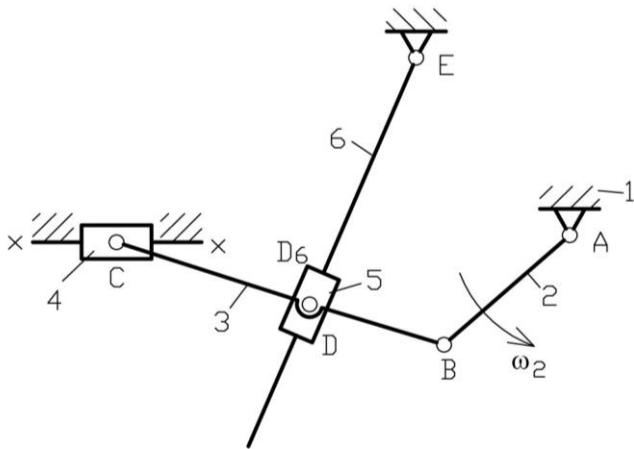
$$a_{Ft}^D = 4,57 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 45,73 \frac{m}{s^2},$$

Ugaono ubrzanje člana 5 je  $\varepsilon_5 = \frac{a_{Ft}^D}{FD} = \frac{45,73 \frac{m}{s^2}}{0,41 \frac{m}{s^2}} = 111,53 \text{ s}^{-2}$ , a smer je određen smerom  $a_{Ft}^D$ .

**Zadatak 2.5.**

Za mehanizam je poznato: ugaona brzina člana 2,  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$ , ugaono ubrzanje člana 2,  $\varepsilon_2 = 0$ , a geometrijske vrednosti zadate su razmerom  $U_L = \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}}$ . Odrediti: brzinu i ubrzanje naznačenih tačaka, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 6. Preporučene razmere

$$\text{su: } U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ cm}}.$$



### Rešenje zadatka

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 2,2 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,44 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 4,5 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,9 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 2,7 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,54 \text{ m}$$

$$\overline{BD} = 1,85 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,37 \text{ m}$$

$$\overline{ED} = 3,5 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,7 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. \vec{v}_B = \overline{AB} \cdot \omega_2 = 0,44 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 4,4 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$2. \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C, \vec{v}_C \perp CB,$$

$$3. \vec{v}_C // x - x,$$

$$4. \frac{\overline{CB}}{\overline{CD}} = \frac{\overline{cb}}{\overline{cd}} \Rightarrow \overline{cd} = \frac{\overline{CD} \cdot \overline{cb}}{\overline{CB}} = \frac{2,7 \text{ cm} \cdot 3,47 \text{ cm}}{4,5 \text{ cm}} = 2,08 \text{ cm},$$

$$5. \vec{v}_{D6} = \vec{v}_D + \vec{v}_{D6}, \vec{v}_{D6} // D_6E,$$

$$6. \vec{v}_{D6} = \vec{v}_E + \vec{v}_{D6}, \vec{v}_{D6} \perp ED.$$

Intenziteti brzina

Razmera za plan brzina je  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti brzina:

$$v_C = \overline{P_v c} \cdot U_v = 3,55 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 3,55 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_B^B = \overline{cb} \cdot U_v = 3,46 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 3,46 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{D6} = \overline{P_v d_6} \cdot U_v = 3,8 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$


---

Ugaone brzina člana 6 je

$$\omega_6 = \frac{v_{D6}}{ED_6} = \frac{3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,7 \text{ m}} = 5,43 \text{ s}^{-1},$$


---

Jednačine za ubrzanja

$$1. \quad a_B = \overline{AB} \cdot \omega_2^2 = 0,44 \text{ m} \cdot 10^2 \text{ s}^{-1} = 44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$2. \quad \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn}^B + \vec{a}_{Ct}^B, \quad \vec{a}_{Cn}^B // CB,$$

$$\vec{a}_{Cn}^B = \frac{(v_C^B)^2}{CB} = \frac{\left(3,46 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,9 \text{ m}} = 13,38 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_{Ct}^B \perp CB,$$

$$3. \quad \vec{a}_C // x - x,$$

$$4. \quad \frac{CB}{CD} = \frac{c'b'}{c'd'} \Rightarrow \frac{c'd'}{CB} = \frac{CD \cdot c'b'}{CB} = \frac{0,54 \text{ m} \cdot 5,86 \text{ cm}}{0,9 \text{ m}} = 3,52 \text{ cm},$$

$$5. \quad \vec{a}_{D6} = \vec{a}_D + \vec{a}_k + \vec{a}_{D6}^D, \quad \vec{a}_{D6}^D // ED,$$

$$a_k = 2 \cdot \omega_6 \cdot v_{D6}^D = 2 \cdot 5,43 \text{ s}^{-1} \cdot 0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 5,43 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_k // CB,$$

$$6. \quad \vec{a}_{D6} = \vec{a}_E + \vec{a}_{D6n}^E + \vec{a}_{D6t}^E, \quad \vec{a}_{D6t}^E \perp ED,$$

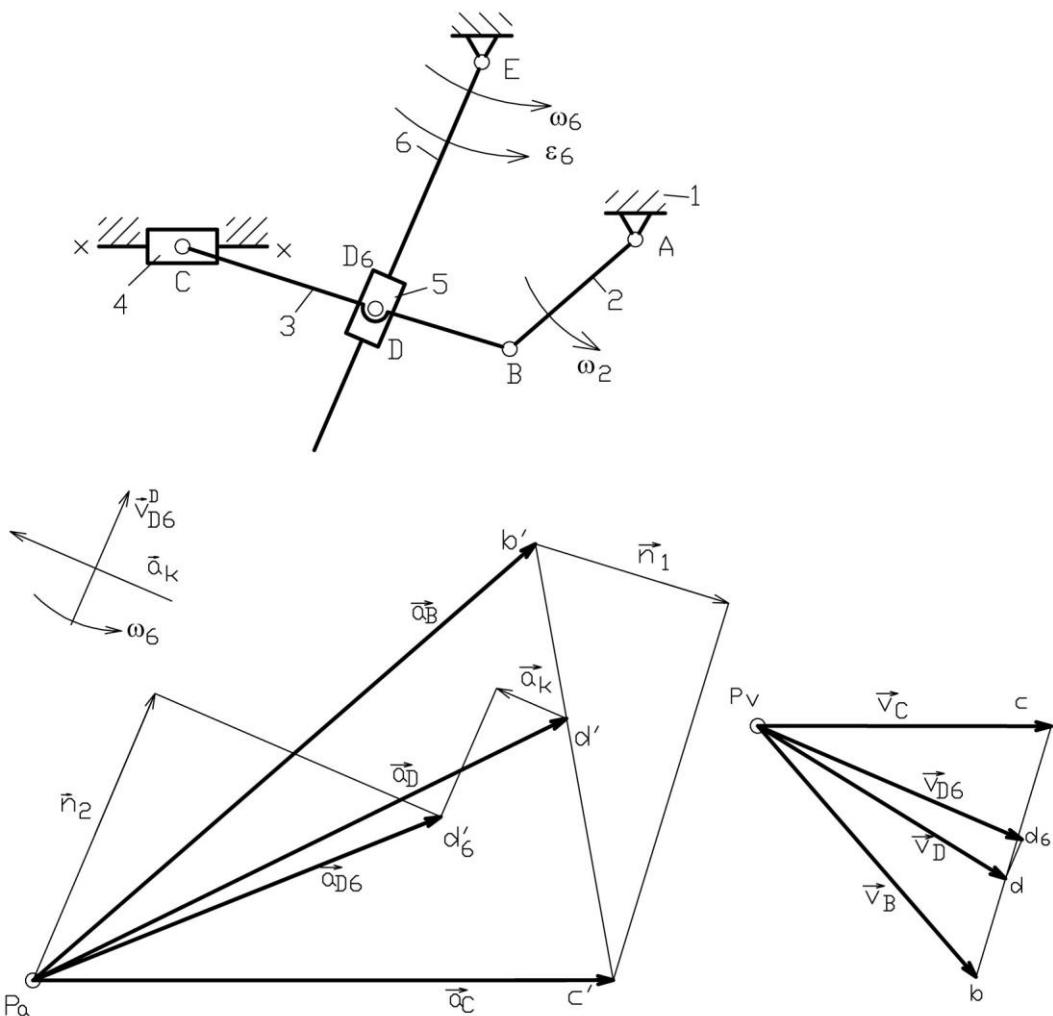
$$\vec{a}_{D6n}^E = \frac{(v_{D6}^E)^2}{D_6 E} = \frac{\left(3,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,7 \text{ m}} = 20,62 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_{D6n}^E // ED.$$


---

Intenzitet ugaonog ubrzanja

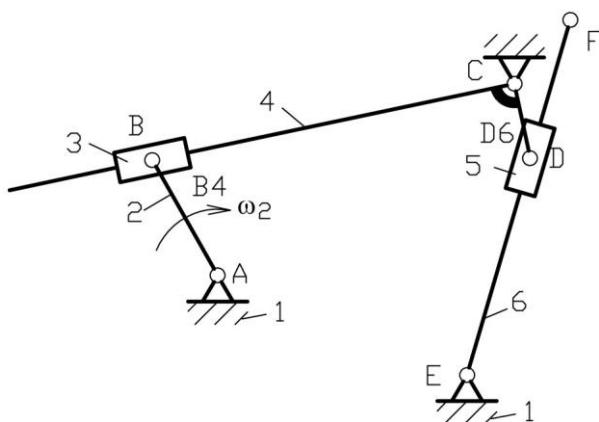
$$\varepsilon_6 = \frac{a_{D6t}^E}{D_6 E} = \frac{20,6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,7 \text{ m}} = 29,42 \text{ s}^{-2}$$


---

**Zadatak 2.6.**

Za prikazani mehanizam dato je:  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ ,  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon_2 = 0$ . Odrediti brzinu tačke F, ugaonu brzinu člana 4, ubrzanje tačke D i ugaono ubrzanje člana 4. Preporučene razmere su:  $U_v = \frac{1 \text{ m}}{5 \text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ cm}}$ .

$$\text{su: } U_v = \frac{1 \text{ m}}{5 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ cm}}.$$



**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 1,75 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,175 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 4,9 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,49 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,1 \text{ m}$$

$$\overline{ED} = 3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,3 \text{ m}$$

$$\overline{FD} = 1,9 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,19 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = 4,9 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,49 \text{ m}$$


---

Jednačine za brzine

$$1. v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,175 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 1,75 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$2. \vec{v}_{B4} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B4}, \vec{v}_{B4} \parallel CB,$$

$$3. \vec{v}_{B4} = \vec{v}_C + \vec{v}_{B4}^C, \vec{v}_{B4}^C \perp CB,$$

$$4. v_D = \omega_4 \cdot \overline{CD}, \omega_4 = \frac{v_{B4}^C}{\overline{CB}} = \frac{0,542 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,49 \text{ m}} = 1,1 \text{ s}^{-1}, v_D = 1,1 \text{ s}^{-1} \cdot 0,1 \text{ m} = 0,11 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \text{ gde je pravac vektora } \vec{v}_D \text{ upravan na } CD \text{ u smeru } \vec{v}_{B4};$$

$$5. \vec{v}_{D6} = \vec{v}_D + \vec{v}_{D6}^D, \vec{v}_{D6}^D \parallel D_6E,$$

$$6. \vec{v}_{D6} = \vec{v}_E + \vec{v}_{D6}^E, \vec{v}_{D6}^E \perp D_6E,$$

$$7. \frac{\overline{P_v d_6}}{\overline{P_v f}} = \frac{\overline{ED}_6}{\overline{EF}} \Rightarrow \frac{\overline{P_v f}}{\overline{P_v f}} = \frac{0,49 \text{ m} \cdot 0,49 \text{ cm}}{0,3 \text{ m}} = 0,8 \text{ cm}.$$

Iz prethodnog sledi da je  $v_F = 0,16 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,

---

Intenziteti brzina

Razmera za plan brzina je  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti brzina:

$$v_{B4} = \overline{P_v b_4} \cdot U_v = 2,7 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ cm}} = 0,54 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{B4}^B = \overline{b b_4} \cdot U_v = 8,3 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ cm}} = 1,66 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{D6} = \overline{P_v d_6} \cdot U_v = 0,5 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ cm}} = 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{D6}^D = \overline{d d_6} \cdot U_v = 0,26 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{5 \text{ cm}} = 0,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$


---

Intenzitet ugaonih brzina

$$\omega_6 = \frac{v_{D6}}{ED_6} = \frac{0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,3 \text{ m}} = 0,33 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_4 = \frac{v_{B4}}{B4C} = \frac{0,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,49 \text{ m}} = 1,10 \text{ s}^{-1}$$


---

Jednačine za ubrzanja

$$1. a_B = \overline{AB} \cdot \omega_2^2 = 0,175 \text{ m} \cdot 10^2 \text{ s}^{-1} = 17,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$2. \vec{a}_{B4} = \vec{a}_B + \vec{a}_{k1} + \vec{a}_{B4}^B, \vec{a}_{B4}^B // CB,$$

$$a_k = 2 \cdot \omega_4 \cdot v_{B4}^B = 2 \cdot 1,1 \text{ s}^{-1} \cdot 1,66 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 3,652 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$3. \vec{a}_{B4} = \vec{a}_C + \vec{a}_{B4n}^C + \vec{a}_{B4t}^C, \vec{a}_{B4n}^C // CB_4, \vec{a}_{B4t}^C \perp CB_4,$$

$$a_{Cn}^{B4} = \frac{\left(v_{B4}^C\right)^2}{CB_4} = \frac{\left(0,54 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,49 \text{ m}} = 0,59 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$4. \vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{Dn}^C + \vec{a}_{Dt}^C, \vec{a}_{Dn}^C // CB_4, \vec{a}_{Dt}^C // CB_4,$$

$$a_{Dn}^C = \omega^2 \cdot \overline{CD} = (1,1 \text{ s}^{-1})^2 \cdot 0,1 \text{ m} = 0,12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$


---

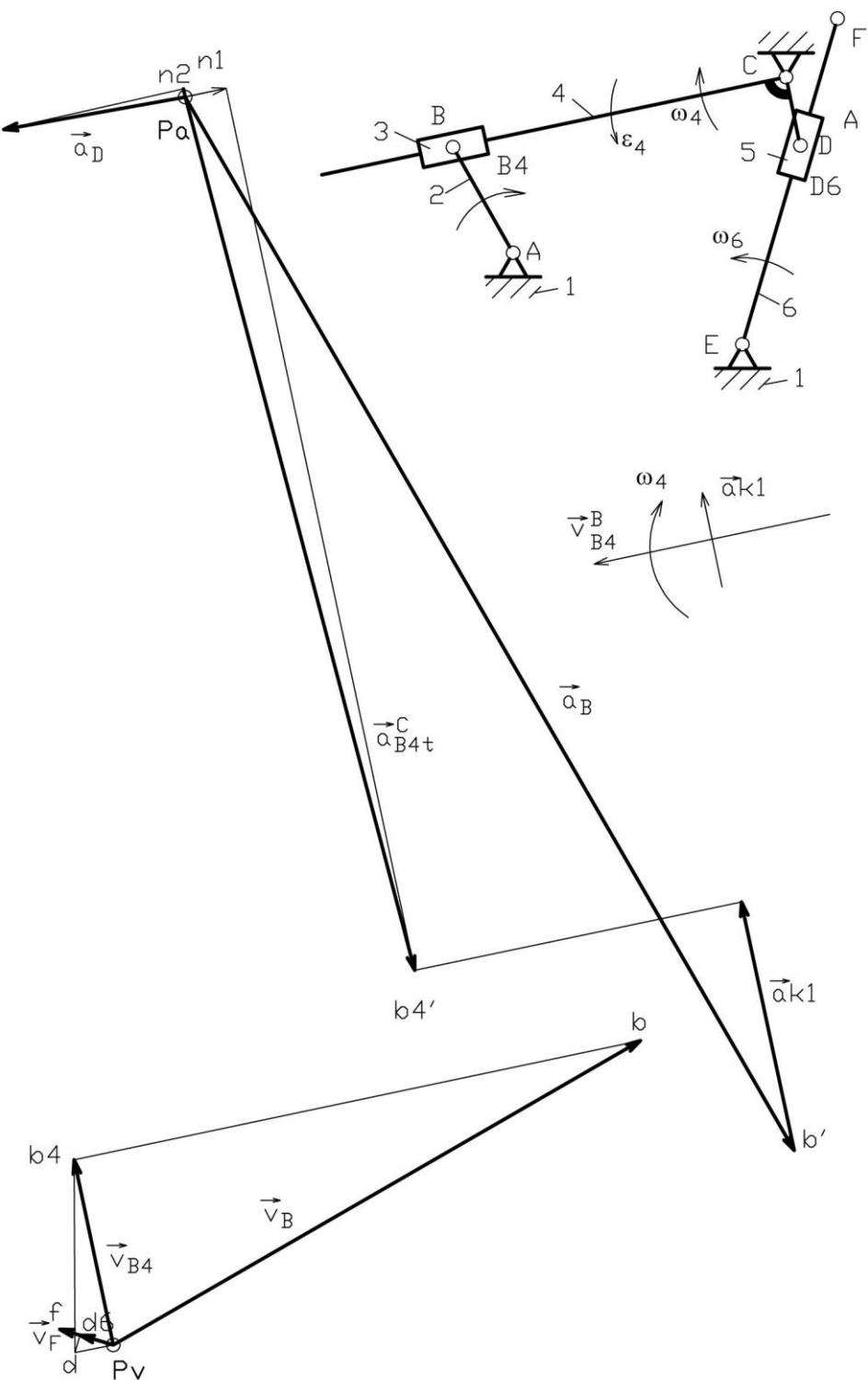
Intenzitet ubrzanja tačke D

$$a_D = \overline{P_v d} \cdot U_a = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}} \cdot 2,65 \text{ cm} = 2,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$


---

Intenzitet ubrzanja tačke D

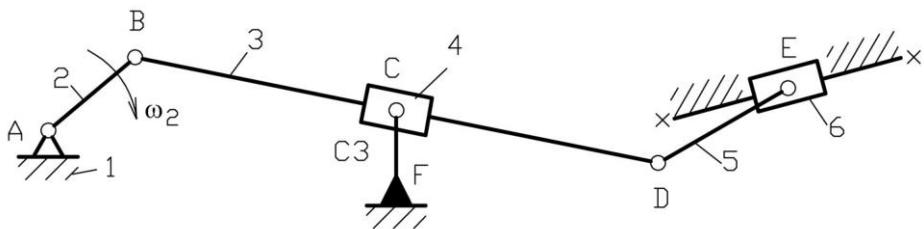
$$a_{Dt}^C = \varepsilon_4 \cdot \overline{CD}, \varepsilon_4 = \frac{a_{B4t}^C}{CB} = \frac{12,98 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,49 \text{ m}} = 26,49 \text{ s}^{-2}, a_{Dt}^C = 26,49 \text{ s}^{-2} \cdot 0,1 \text{ m} = 2,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$



**Zadatak 2.7.**

Za prikazani mehanizam dato je:  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ ,  $\omega_2 = 20 \text{ s}^{-1}$  i  $\varepsilon_2 = 0$ . Odrediti brzinu tačke E, ubrzanje tačke D, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 5. Preporučene razmere su:

$$U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}.$$

**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 1,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,15 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = \overline{CD} = 3,52 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,352 \text{ m}$$

$$\overline{BD} = 7,05 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,705 \text{ m}$$

$$\overline{ED} = 1,98 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,198 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. \quad v_B = \overline{AB} \cdot \omega_2 = 0,15 \text{ m} \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_B \perp BA,$$

$$2. \quad \vec{v}_{C3} = \vec{v}_B + \vec{v}_{C3}, \quad \vec{v}_{C3} \perp BD,$$

$$3. \quad \vec{v}_{C3} = \vec{v}_C + \vec{v}_{C3}, \quad \vec{v}_{C3} // BD,$$

$$4. \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{BC3}} = \frac{\overline{bd}}{\overline{bc3}}, \quad \overline{bd} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{bc3}}{\overline{BC3}} = \frac{7,05 \text{ cm} \cdot 1,87 \text{ cm}}{3,52 \text{ cm}} = 3,74 \text{ cm},$$

$$5. \quad \vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_E, \quad \vec{v}_E \perp DE,$$

$$6. \quad \vec{v}_E // x - x.$$

Intenzitet brzina

$$\text{Razmera za plan brzina je } U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}, \text{ iz kojeg su određuju intenziteti brzina:}$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 3,98 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 3,1 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{C3} = v_{C3}^C = \overline{P_v c_3} \cdot U_v = 2,34 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 2,34 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Intenzitet ugaone brzine člana 3 je

$$\omega_3 = \frac{v_B}{C3B} = \frac{1,87 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,352 \text{ m}} = 5,34 \text{ s}^{-1}, \text{ a smer je određen smerom relativne brzine } \vec{v}_{C3}^B.$$

Jednačine za ubrzanja

$$1. \quad a_B = \overline{AB} \cdot \omega_2^2 = 0,15 \text{ m} \cdot (20 \text{ s}^{-1})^2 = 60 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_B \parallel \overline{AB} \text{ u smeru ka tački A,}$$

$$2. \quad \vec{a}_{C3} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C3n} + \vec{a}_{C3t}, \quad \vec{a}_{C3n} \parallel CB, \quad \vec{a}_{C3t} \perp CB,$$

$$a_{C3n}^B = \frac{\left(\frac{v_{C3}^B}{CB}\right)^2}{0,352 \text{ m}} = \frac{\left(1,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,352 \text{ m}} = 10,31 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$3. \quad \vec{a}_{C3} = \vec{a}_C + \vec{a}_k + \vec{a}_{C3}, \quad \vec{a}_{C3} \parallel BC,$$

$$\text{gde je: } a_k = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{C3}^C = 2 \cdot 5,34 \text{ s}^{-1} \cdot 2,34 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 24,91 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ smer je određen kao na skici,}$$

$$4. \quad \frac{\overline{BD}}{\overline{BC3}} = \frac{\overline{b'd'}}{\overline{b'c3'}} \Rightarrow \frac{\overline{b'd'}}{\overline{b'c3'}} = \frac{\overline{BD} \cdot \overline{b'c3'}}{\overline{BC3}} = \frac{0,705 \text{ m} \cdot 7,25 \text{ cm}}{0,352 \text{ m}} = 14,5 \text{ cm},$$

$$5. \quad \vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}_{En} + \vec{a}_{Et}, \quad \vec{a}_{En} \parallel ED, \quad \vec{a}_{Et} \perp ED,$$

$$a_{En}^D = \frac{\left(\frac{v_E^D}{ED}\right)^2}{0,198 \text{ m}} = \frac{(0,65 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{0,198 \text{ m}} = 2,13 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$6. \quad \vec{a}_E \parallel x - x.$$

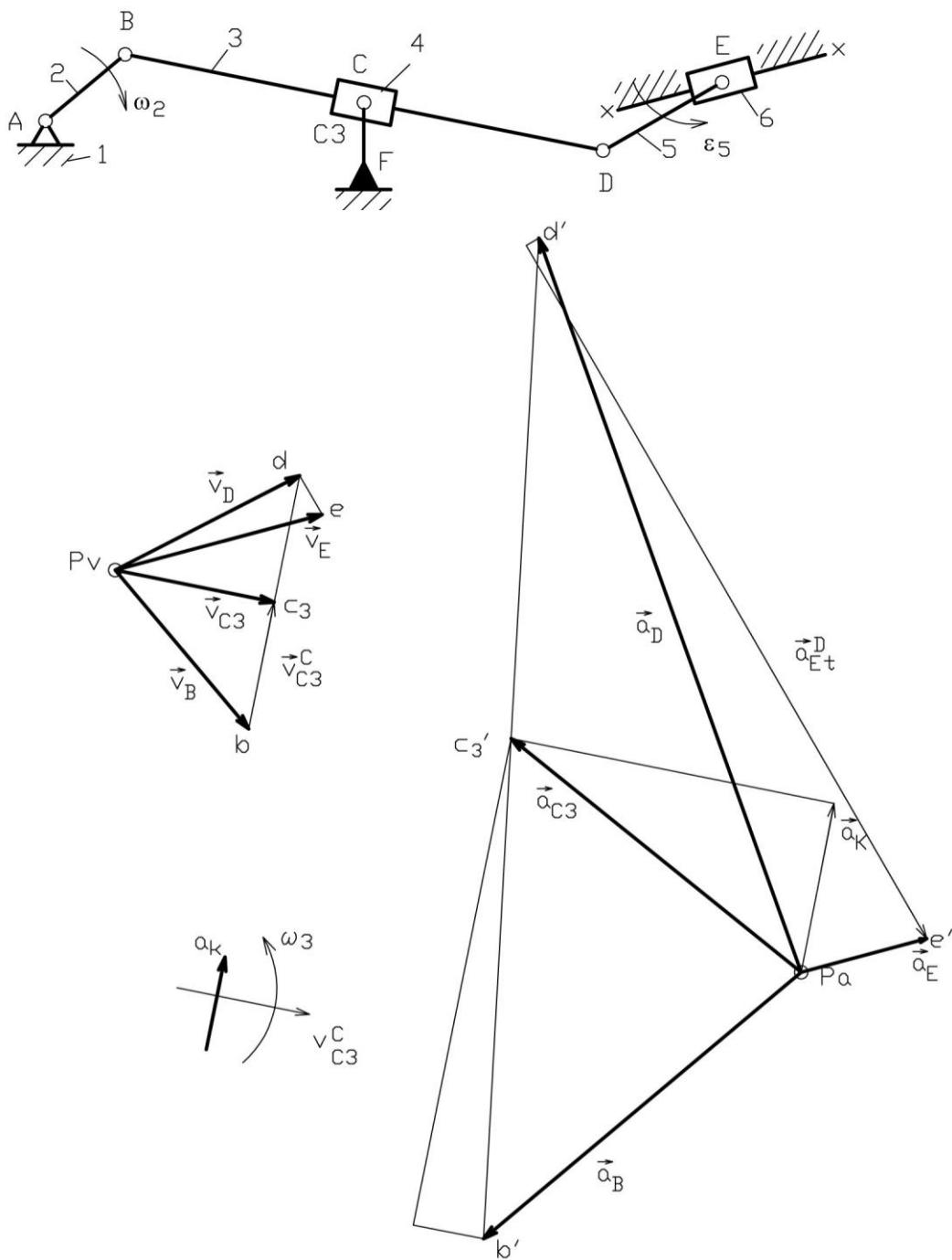
Intenzitet ubrzanja tačke D dobija se iz izraza:

$$a_D = \overline{P_a d'} \cdot U_a = 11,28 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}} = 112,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Intenzitet ugaonog ubrzanja člana 5 je

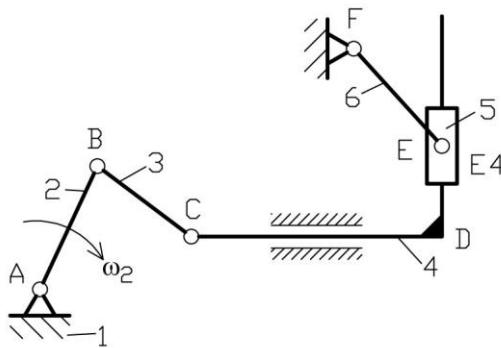
$$\varepsilon_5 = \frac{a_E^D t}{DE} = \frac{115,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,198 \text{ m}} = 584,48 \text{ s}^{-2}.$$

Smer ugaonog ubrzanja  $\varepsilon_5$  je u smeru  $\vec{a}_E^D t$ .

**Zadatak 2.8.**

Za mehanizam je poznata ugaona brzina člana 2,  $\omega_2 = 20 \text{ s}^{-1}$ , ugaono ubrzanje člana 2,  $\varepsilon_2 = 0 \text{ s}^{-2}$ , a geometrijske vrednosti zadate su razmerom  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ . Odrediti brzinu i ubrzanje tačke E, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 6. Preporučene razmere su:

$$U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}}.$$



### Rešenje zadatka

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 1,8 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,18 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 1,55 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,15 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 3,3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,33 \text{ m}$$

$$\overline{ED} = 1,2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,12 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = 1,73 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,17 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. \quad v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,18 \text{ m} \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_B \perp BA,$$

$$2. \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_{CB}, \quad \vec{v}_C \perp CB,$$

$$3. \quad \vec{v}_C \parallel CD,$$

$$4. \quad \vec{v}_D = \vec{v}_C = \vec{v}_{E4},$$

$$5. \quad \vec{v}_E = \vec{v}_{E4} + \vec{v}_{E}, \quad \vec{v}_E,$$

$$6. \quad \vec{v}_E \perp FE.$$

Intenziteti brzina

Razmera za plan brzina je  $U_v = \frac{1 \text{ m/s}}{2 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti brzina:

$$v_C = \overline{PC} \cdot U_v = 4,4 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 4,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad v_C = v_D = v_{E4},$$

$$v_E = \overline{Pe} \cdot U_v = 5,9 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 5,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugaona brzina

Intenzitet ugaone brzine  $\omega_6$  je  $\omega_6 = \frac{v_E}{\overline{FE}} = \frac{5,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,17 \text{ m}} = 34,7 \text{ s}^{-1}$ , a smer je definisan smerom

---

brzine tačke E.

Jednačine za ubrzanje

$$1. \quad a_B = AB \cdot \omega_2^2 = 0,18m \cdot (20s^{-1})^2 = 72 \frac{m}{s^2} \text{ gde je: } \vec{a}_B \parallel AB \text{ u smeru ka tački A,}$$

$$2. \quad \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}, \text{ gde je } \vec{a}_{Cn} \parallel CB \text{ u smeru ka tački B,}$$

$$\vec{a}_{Cn} = \frac{(a_C)^2}{CB} = \frac{(1,9)^2}{0,15} = 24 \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_{Ct} \perp CB,$$

$$3. \quad \vec{a}_C \parallel CD,$$

$$4. \quad \vec{a}_D = \vec{a}_{E4} = \vec{a}_C,$$

$$5. \quad \vec{a}_E = \vec{a}_{E4} + \vec{a}_E^{E4}, \text{ gde je: } \vec{a}_E^{E4} \parallel E4D,$$

$$6. \quad \vec{a}_E = \vec{a}_F + \vec{a}_{En} + \vec{a}_{Et}, \text{ gde je: } \vec{a}_{En} \parallel EF \text{ u smeru ka tački F,}$$

$$a_{En}^F = \frac{(v_E^F)^2}{EF} = \frac{\left(5,9 \frac{m}{s}\right)^2}{0,17 m} = 204,7 \text{ m/s}^2, \quad \vec{a}_{Et} \perp EF.$$


---

Intenziteti ubrzanja

Razmera za plan ubrzanja je  $U_a = \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti ubrzanja:

$$a_C = \overline{P_a c} \cdot U_a = 0,565 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 11,3 \frac{m}{s^2},$$

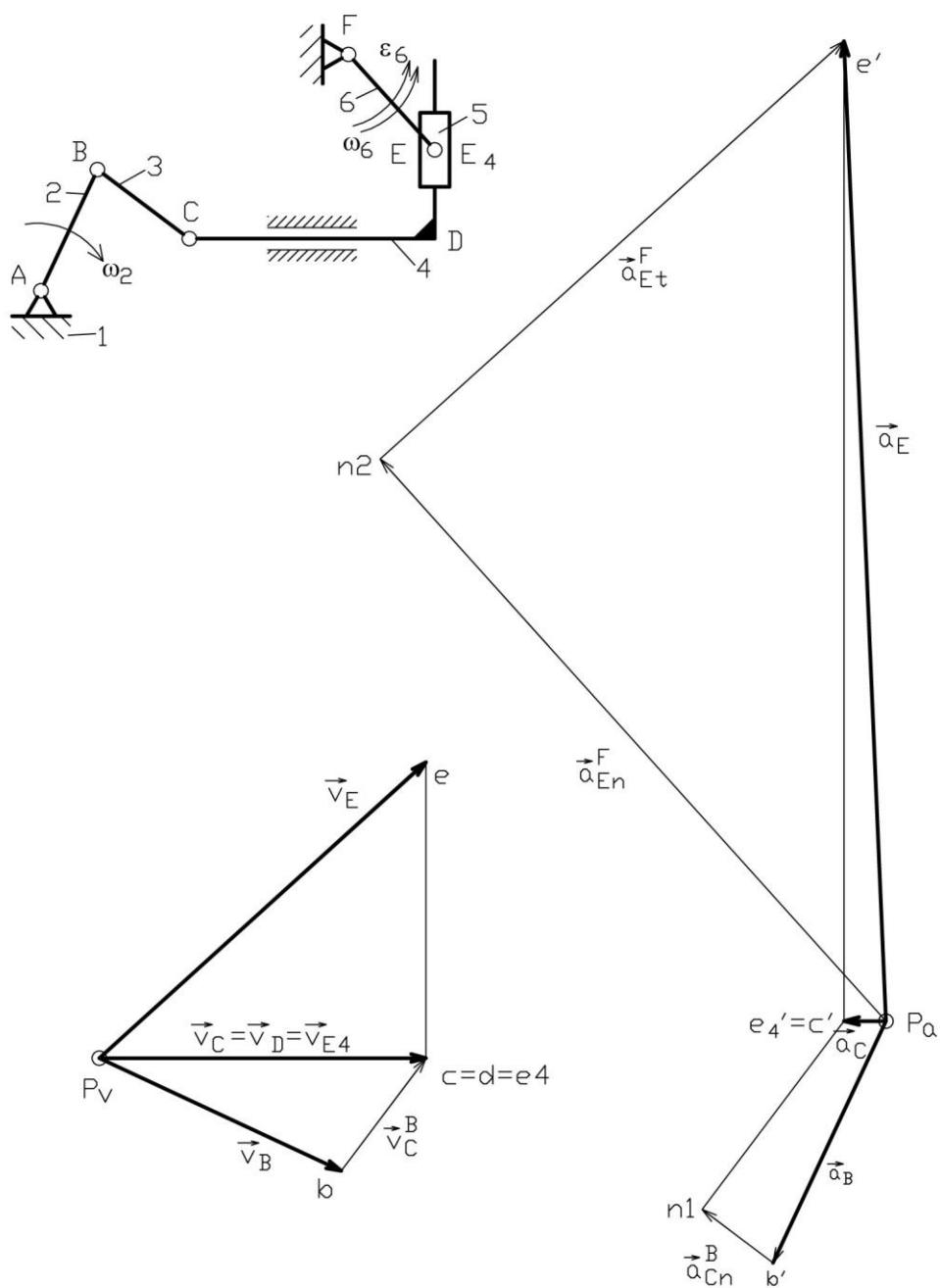
$$a_E = \overline{P_a e} \cdot U_a = 13,2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 264 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{Et}^F = \overline{n2e} \cdot U_a = 8,4 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 168 \frac{m}{s^2}.$$


---

Ugaono ubrzanje člana 6 je

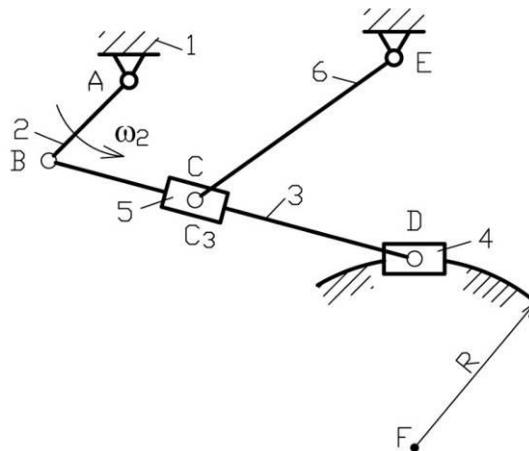
$$\varepsilon_6 = \frac{a_{Et}^F}{EF} = \frac{168 \frac{m}{s^2}}{0,17 m} = 988 \text{ s}^{-2}, \text{ a smer se određuje na osnovu smera } \vec{a}_{Et}^F.$$



### Zadatak 2.9.

Geometrijski podaci mehanizma dati su na kinematičkoj šemi nacrtanoj u razmeri  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}}$ . Pogonski član 2 se obrće jednolikom ugaonom brzinom  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti brzine i ubrzanja kinematičkih tačaka, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 6. Preporučene

$$\text{razmere su } U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ cm}}.$$

**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 1,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,3 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,4 \text{ m}$$

$$\overline{BD} = 5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 1 \text{ m}$$

$$\overline{CE} = 3,2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,64 \text{ m}$$

$$\overline{FD} = 2,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,5 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,3 \cdot 10 = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \vec{v}_B \perp BA,$$

$$2. \vec{v}_D = \vec{v}_B + \vec{v}_D^B, \vec{v}_D \perp DB,$$

$$3. \vec{v}_D \perp \overline{DF},$$

$$4. \frac{\overline{BD}}{\overline{BC}_3} = \frac{\overline{bd}}{\overline{bc}_3} \Rightarrow \overline{bc}_3 = \frac{\overline{bd} \cdot \overline{BC}_3}{\overline{BD}} = \frac{41,6 \cdot 20}{50} = 16,64 \text{ mm},$$

$$5. \vec{v}_C = \vec{v}_{C3} + \vec{v}_C^{C3}, v_C \parallel DB,$$

$$6. \vec{v}_C = \vec{v}_E + \vec{v}_C^E, v_C \perp EC.$$

Intenziteti brzina

$$v_D = \overline{P_v d} \cdot U_v = 5,55 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,77 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_C = \overline{P_v c} \cdot U_v = 1,68 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 0,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_{C3} = \overline{P_v c_3} \cdot U_v = 5,4 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,7 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_D^B = \overline{db} \cdot U_v = 4,16 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,08 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$v_C^{C3} = \overline{cc_3} \cdot U_v = 4,06 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,03 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Intenziteti ugaonih brzina

$$\omega_3 = \frac{v_D^B}{DB} = \frac{2,08 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ m}} = 2,08 \text{ s}^{-1}, \text{ smer je određen na osnovu smera brzine } \vec{v}_D^B,$$

$$\omega_6 = \frac{v_C^E}{CE} = \frac{0,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,64 \text{ m}} = 1,31 \text{ s}^{-1}, \text{ smer je određen na osnovu smera brzine } \vec{v}_C^E.$$

Jednačine za ubrzanja

$$1. \vec{a}_B = \overline{AB} \cdot \omega_2^2 = 0,3 \text{ m} \cdot (10 \text{ s}^{-1})^2 = 30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ gde je: } \vec{a}_B \parallel \overline{AB} \text{ u smeru ka tački A,}$$

$$2. \vec{a}_D = \vec{a}_B + \vec{a}_{Dn}^B + \vec{a}_{Dt}^B, \vec{a}_{Dn}^B \parallel BD, \vec{a}_{Dt}^B \perp BD, a_{Dn}^B = \frac{(\vec{v}_D^B)^2}{DB} = \frac{(2,08 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{1 \text{ m}} = 4,32 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$3. \vec{a}_D = \vec{a}_{Dn}^F + \vec{a}_{Dt}^F, \vec{a}_{Dn}^F \parallel FD, \vec{a}_{Dt}^F \perp FD, a_{Dn}^F = \frac{(v_D^F)^2}{DF} = \frac{(2,77 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{0,5 \text{ m}} = 15,34 \text{ s}^{-1},$$

$$4. \frac{\overline{BD}}{\overline{BC_3}} = \frac{\overline{b' d'}}{\overline{b' c_3'}} \Rightarrow \frac{\overline{b' c_3'}}{\overline{BD}} = \frac{\overline{b' d'} \cdot \overline{BC_3}}{\overline{BD}} = \frac{7,8 \text{ cm} \cdot 0,4 \text{ m}}{1 \text{ m}} = 3,12 \text{ cm},$$

$$5. \vec{a}_C = \vec{a}_{C3} + \vec{a}_k + \vec{a}_C^{C3}, \text{ gde je: } a_k = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_C^{C3} = 2 \cdot 2,08 \text{ s}^{-1} \cdot 2,03 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 8,65 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ smer}$$

$\vec{a}_k$  je određen na skici,

$$6. \vec{a}_C = \vec{a}_E + \vec{a}_{Cn}^E + \vec{a}_{Ce}^E, \text{ gde je } a_{Cn}^E = \frac{(v_C^E)^2}{CE} = \frac{(0,84 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{0,64 \text{ m}} = 1,1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \vec{a}_{Cn}^E \parallel CE \text{ u}$$

smeru ka tački E.

Intenziteti ubrzanja

$$\text{Razmera za plan ubrzanja je } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ cm}}, \text{ iz kojeg su određuju intenziteti ubrzanja:}$$

$$a_C = \overline{P_a c'} \cdot U_a = 0,48 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ cm}} = 2,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

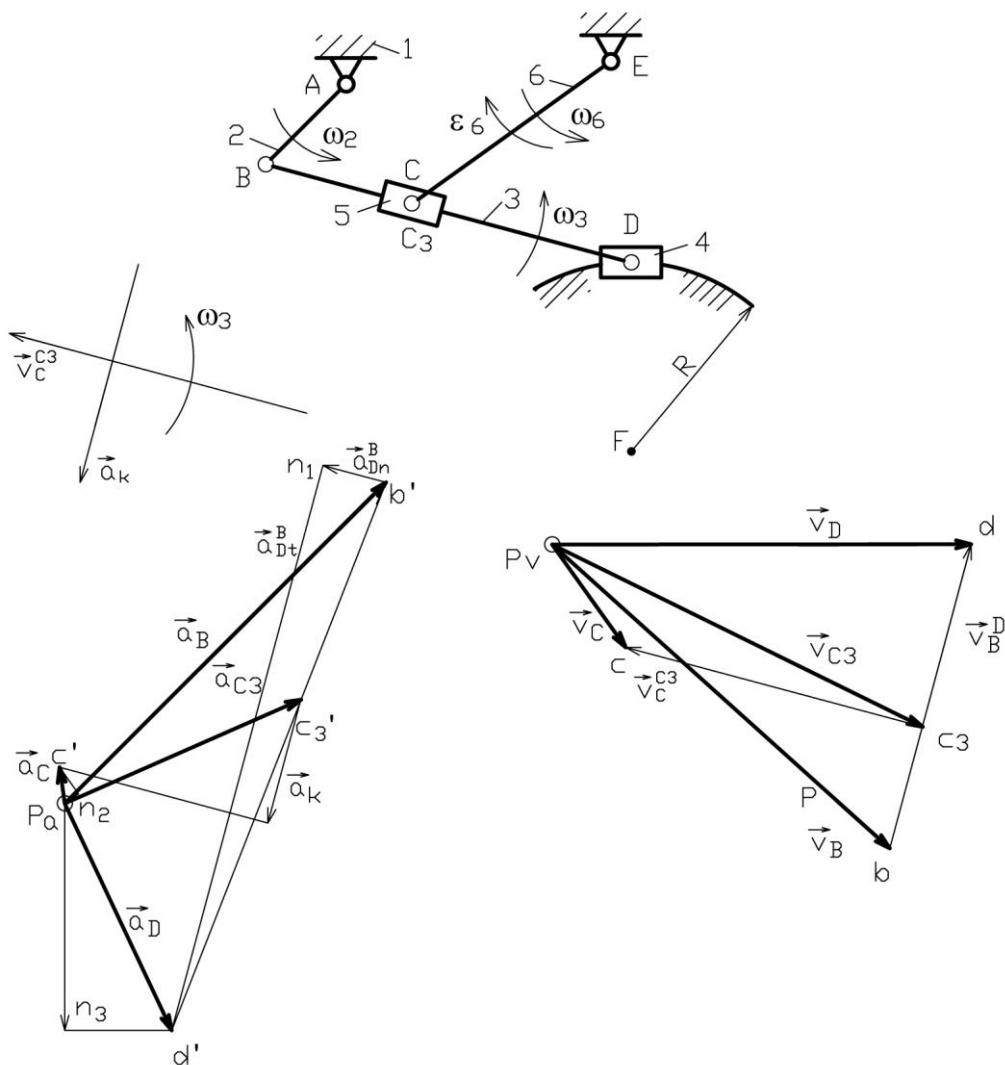
$$a_D = \overline{P_a d'} \cdot U_a = 3,3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ cm}} = 16,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_{C3} = \overline{P_a c_3}' \cdot U_a = 3,4 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ cm}} = 17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_{Ct}^E = \overline{n_2 c}' \cdot U_a = 0,43 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ cm}} = 2,15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

Ugaono ubrzanje

$$\varepsilon_6 = \frac{a_{Ct}^E}{EC} = \frac{2,15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,64 \text{ m}} = 3,36 \text{ s}^{-2}, \text{ a smer je dat na slici.}$$

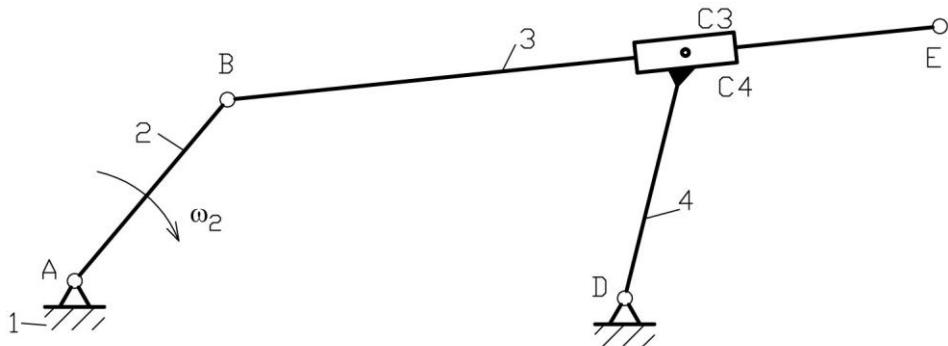


### 3. Određivanje kinematičkih parametara kliznih parametara metodom proširenja

#### Zadatak 3.1.

Odrediti kinematičke parametre mehanizma ako su poznati sledeći podaci:  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$ ,

$$\varepsilon_2 = 0 \text{ s}^{-2}, U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}, U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}.$$



#### Rešenje zadatka

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 3,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,31 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 6,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,61 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 3,3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,33 \text{ m}$$

$$\overline{BE} = 9,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,95 \text{ m}$$

$$\overline{BD} = 5,9 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,59 \text{ m}$$

$$\overline{CE} = 3,4 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,34 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. \quad v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,31 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 3,1 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_B \perp BA,$$

$$2. \quad \vec{v}_{B4} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B4}, \text{ gde je } \vec{v}_{B4} \parallel CB,$$

$$3. \quad \vec{v}_{B4} = \vec{v}_D + \vec{v}_{B4}, \text{ gde je } \vec{v}_{B4} \perp BD,$$

$$4. \quad \vec{v}_{C4} = \vec{v}_{B4} + \vec{v}_{C4}, \text{ gde je } \vec{v}_{C4} \perp CB,$$

5.  $\vec{v}_{C4} = \vec{v}_D + \vec{v}_{C4}^D$ , gde je  $\vec{v}_{C4}^D \perp CD$ ,
6.  $\vec{v}_{C3} = \vec{v}_{C4} + \vec{v}_{C3}^{C4}$ , gde je  $\vec{v}_{C3}^{C4} / BC$ ,
7.  $\vec{v}_{C3} = \vec{v}_B + \vec{v}_{C3}^B$ , gde je  $\vec{v}_{C3}^B \perp BC$ ,
8.  $\frac{\overline{bc}_3}{\overline{be}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{be} = \frac{\overline{bc}_3 \cdot \overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{2,74\text{cm} \cdot 9,5\text{cm}}{6,1\text{cm}} = 4,27\text{cm}$ .

Intenziteti brzina

$$\text{Razmara za plan brzina je } U_v = \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}}, \text{ iz kojeg su određuju intenziteti brzina:}$$

$$v_{B4}^B = \overline{b_4 b} \cdot U_v = 3,57\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 3,57\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 2,96\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 2,96\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{B4}^D = \overline{P_v b_4} \cdot U_v = 2,64\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 2,64\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{C4}^{B4} = \overline{c_4 b_4} \cdot U_v = 2,74\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 2,74\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{C4}^D = \overline{P_v c_4} \cdot U_v = 1,5\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 1,5\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{C4}^{C3} = \overline{c_4 c_3} \cdot U_v = 3,57\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 3,57\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

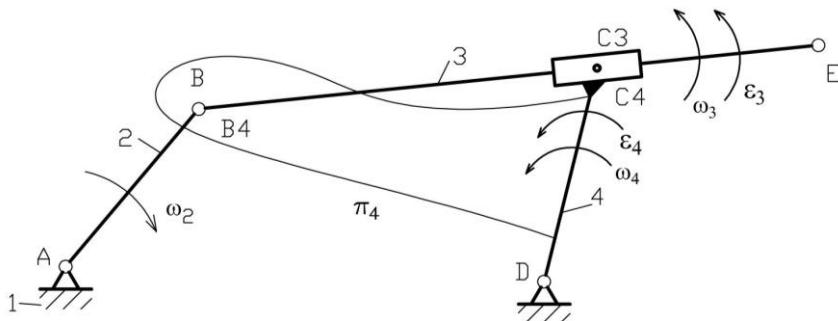
$$v_{C3}^B = \overline{c_3 b} \cdot U_v = 2,74\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 2,74\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{B4} = \overline{P_v b_4} \cdot U_v = 2,64\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 2,64\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{C3} = \overline{P_v c_3} \cdot U_v = 2,21\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 2,21\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{C4} = \overline{P_v c_4} \cdot U_v = 1,5\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 1,5\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 2,96\text{ cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{1\text{cm}} = 2,96\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Ugaona brzina člana 3 je

$$\omega_3 = \frac{v_{C3}^B}{CB} = \frac{2,74 \frac{m}{s}}{0,61 m} = 4,49 s^{-1}, \text{ a smer je određen smerom brzine } v_{C3}^B.$$

Intenzitet ugaone brzine je  $\omega_4 = \frac{v_{C4}}{CD} = \frac{1,5 \frac{m}{s}}{0,33 m} = 4,54 s^{-1}$ , a smer je određen smrrom brzine  $\vec{v}_{C4}$ .

Jednačine za ubrzanje

$$1. \quad a_B = \overline{AB} \cdot \omega_2^2 = 0,31 m \cdot (10 s^{-1})^2 = 31 \frac{m}{s^2},$$

$$2. \quad \vec{a}_{B4} = \vec{a}_B + \vec{a}_{k1} + \vec{a}_{B4}^B, \quad \vec{a}_{B4} \parallel CB,$$

$$\vec{a}_{k1} = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{B4}^B = 2 \cdot 4,49 s^{-1} \cdot 3,57 \frac{m}{s} = 32,06 \frac{m}{s^2},$$

$$3. \quad \vec{a}_{B4} = \vec{a}_D + \vec{a}_{B4n} + \vec{a}_{B4t},$$

$$\vec{a}_{B4n} \parallel BD \text{ u smeru ka tački } D, \quad a_{B4n}^D = \frac{\left( \frac{v_{B4}^D}{BD} \right)^2}{\frac{BD}{0,59 m}} = \frac{\left( 2,64 \frac{m}{s} \right)^2}{0,59 m} = 11,82 \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_{B4t} \perp BD,$$

$$4. \quad \vec{a}_{C4} = \vec{a}_{B4} + \vec{a}_{C4n} + \vec{a}_{C4t},$$

$$a_{C4n}^{B4} = \frac{\left( \frac{v_{C4}^{B4}}{CB} \right)^2}{\frac{CB}{0,61 m}} = \frac{\left( 2,74 \frac{m}{s} \right)^2}{0,61 m} = 12,3 \frac{m}{s}, \quad \vec{a}_{C4n}^{B4} \parallel CB \text{ u smeru ka tački } B_4 \text{ i } \vec{a}_{C4t}^{B4} \perp CB$$

$$5. \quad \vec{a}_{C4} = \vec{a}_D + \vec{a}_{C4n} + \vec{a}_{C4t},$$

$$a_{C4n}^D = \frac{\left( \frac{v_{C4}^D}{CD} \right)^2}{\frac{CD}{0,33 m}} = \frac{\left( 1,5 \frac{m}{s} \right)^2}{0,33 m} = 6,82 \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_{C4n}^D \parallel CD \text{ u smeru ka tački } D \text{ i } \vec{a}_{C4t}^D \perp CD,$$

$$6. \quad \vec{a}_{C3} = \vec{a}_{C4} + \vec{a}_{k2} + \vec{a}_{C3}, \quad \vec{a}_{C3} \parallel CB,$$

$$a_{k2} = 2 \cdot \omega_3 \cdot v_{C3}^C = 2 \cdot 4,49 s^{-1} \cdot 3,57 \frac{m}{s} = 32,06 \frac{m}{s^2},$$

$$7. \quad \vec{a}_{C3} = \vec{a}_B + \vec{a}_{C3n} + \vec{a}_{C3t},$$

$$a_{C3n}^B = \frac{\left(\frac{v_{C3}}{CB}\right)^2}{\frac{CB}{0,61m}} = \frac{\left(2,74 \frac{m}{s}\right)^2}{0,61m} = 12,3 \frac{m}{s^2}, \quad \vec{a}_{C3n}^B \parallel CB \text{ u smeru ka tački } B \text{ i } \vec{a}_{C3t}^B \perp CB,$$

$$8. \frac{\overline{b'c'_3}}{\overline{b'e'}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{BE}} \Rightarrow \overline{b'e'} = \frac{\overline{b'c'_3} \cdot \overline{BE}}{\overline{BC}} = \frac{5,93cm \cdot 9,5cm}{6,1cm} = 9,23cm.$$

Intenziteti ubrzanja

$$\text{Razmera za plan ubrzanja je } U_a = \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}}, \text{ iz kojeg su određuju intenziteti ubrzanja:}$$

$$a_E = \overline{P_a e'} \cdot U_a = 8,03 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 80,3 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{C3} = \overline{P_a c_3'} \cdot U_a = 5,03 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 50,3 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{C4} = \overline{P_a c_4'} \cdot U_a = 3,32 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 33,2 \frac{m}{s^2},$$

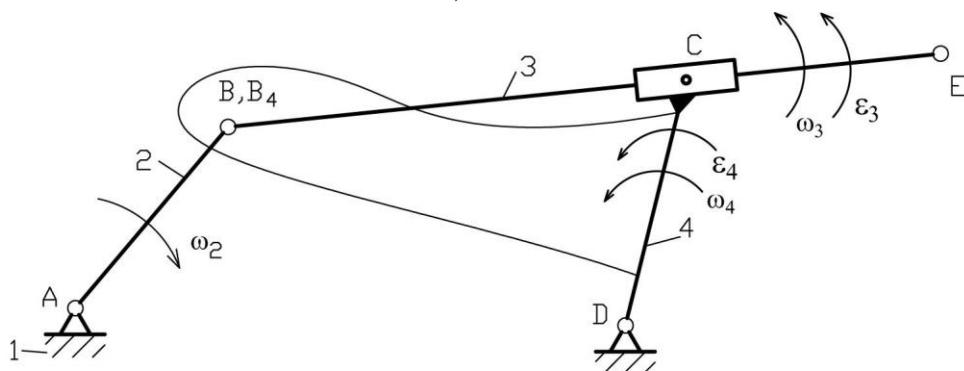
$$a_{C3t}^B = \overline{n_4 c_3'} \cdot U_a = 5,81 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 58,1 \frac{m}{s^2},$$

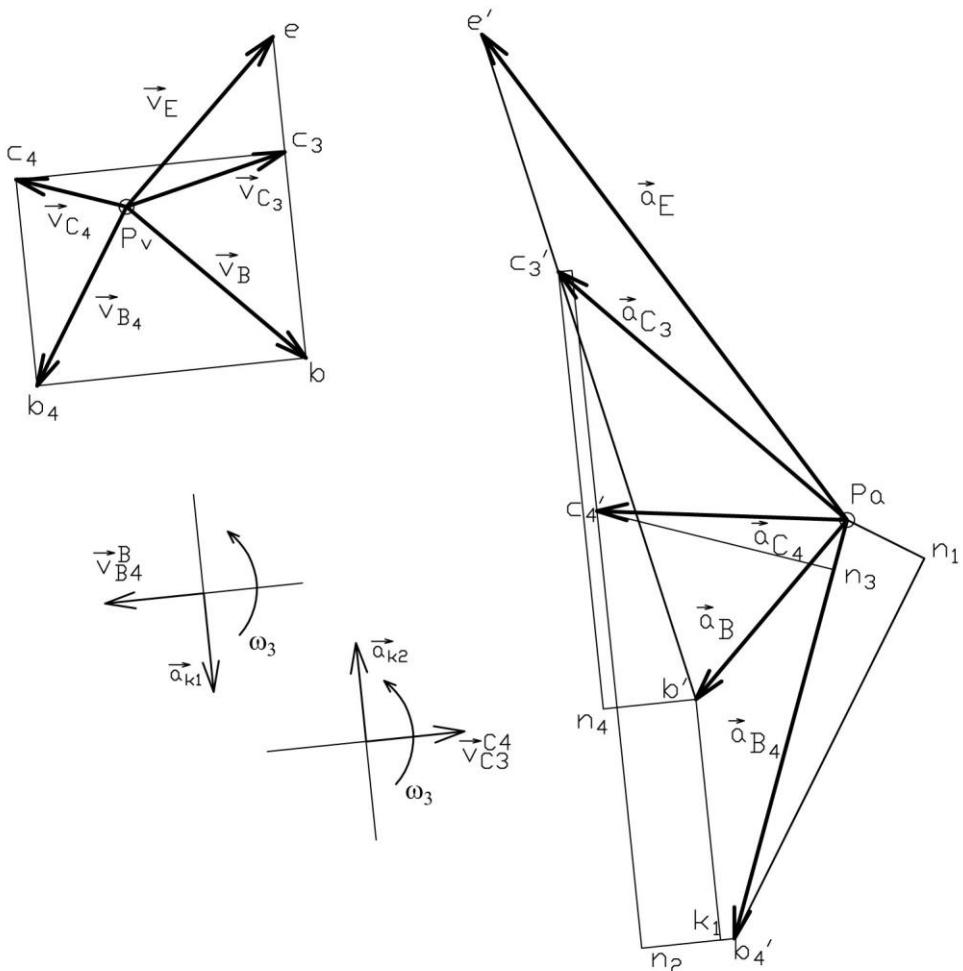
$$a_{C4t}^D = \overline{n_3 c_4'} \cdot U_a = 3,24 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 32,4 \frac{m}{s^2}.$$

Ugaona ubrzanja

$$\text{Ugaono ubrzanje } \varepsilon_3 = \frac{a_{C3t}^B}{BC} = \frac{58,1 \frac{m}{s^2}}{0,61m} = 95,2 \text{ s}^{-2}, \text{ a smer odgovara smeru vektora } \vec{a}_{C3t}^B.$$

$$\text{Ugaono ubrzanje } \varepsilon_4 = \frac{a_{C4t}^D}{CD} = \frac{32,4 \frac{m}{s^2}}{0,33m} = 98,2 \text{ s}^{-2}, \text{ a smer odgovara smeru vektora } \vec{a}_{C4t}^D.$$



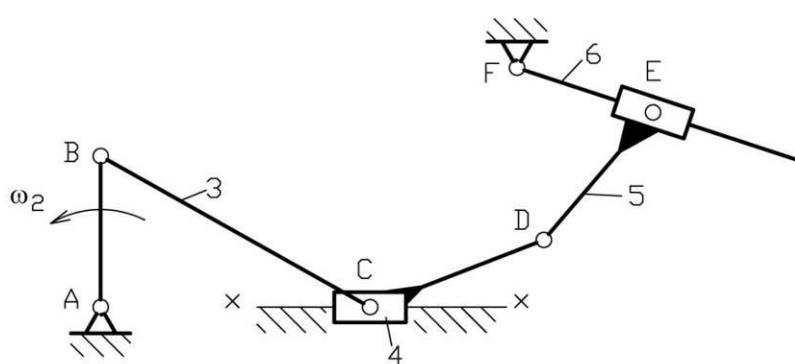


### Zadatak 3.2.

Odrediti brzine i ubrzanja kinematičkih tačaka, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje članova.

Dati su podaci:  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ ,  $\omega_2 = 20 \text{ s}^{-1}$  i  $\varepsilon_2 = 0$ . Preporučene razmere su:  $U_v = \frac{1 \text{ m}}{1 \text{ cm}}$  i

$$U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}}.$$



**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,2 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 4,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,41 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 2,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,25 \text{ m}$$

$$\overline{DE} = 2,22 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,22 \text{ m}$$

$$\overline{DF} = 2,3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,23 \text{ m}$$

$$\overline{FE} = 1,8 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,18 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. v_B = \overline{AB} \cdot \omega_2 = 0,2 \text{ m} \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_B \perp \overrightarrow{BA},$$

$$2. \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C, \text{ gde je } \vec{v}_C \perp CB,$$

$$3. \vec{v}_C // x - x,$$

$$4. \vec{v}_D = \vec{v}_C,$$

$$5. \vec{v}_{D6} = \vec{v}_D + \vec{v}_{D6}, \text{ gde je } \vec{v}_{D6} // FE,$$

$$6. \vec{v}_{D6} = \vec{v}_F + \vec{v}_{D6}, \text{ gde je } \vec{v}_{D6} \perp FD,$$

$$7. \vec{v}_{E6} = \vec{v}_{D6} + \vec{v}_{E6}, \text{ gde je } \vec{v}_{E6} \perp DE,$$

$$8. \vec{v}_{E6} = \vec{v}_F + \vec{v}_{E6} \text{ gde je } \vec{v}_{D6} \perp EF,$$

$$9. \vec{v}_E = \vec{v}_{E6} + \vec{v}_E, \text{ gde je } \vec{v}_E // EF,$$

$$10. \vec{v}_E = \vec{v}_D + \vec{v}_E, \text{ gde je } \vec{v}_E \perp ED.$$

Intenziteti brzina

Razmera za plan brzina je  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti brzina:

$$v_C = v_D = \overline{P_v c} \cdot U_v = 4 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 2,63 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 2,63 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E^D = \overline{e_d} \cdot U_v = 2,65 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 2,65 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{E6}^{D6} = \overline{e_6 d_6} \cdot U_v = 2,65 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{cm}} = 2,65 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{E6} = \overline{P_v e_6} \cdot U_v = 2,26 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{cm}} = 2,26 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{D6} = \overline{P_v d_6} \cdot U_v = 2,75 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{cm}} = 2,75 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_D^{D6} = \overline{d_6 d} \cdot U_v = 1,35 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{cm}} = 1,35 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E^F = v_E = 2,63 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^B = 0.$$

Ugaone brzine

$$\text{Intenzitet ugaone brzine je } \omega_3 = \frac{\vec{v}_C^B}{CB} = \frac{0}{0,41 \text{ m}} = 0 \text{ s}^{-1}.$$

$$\text{Intenzitet ugaone brzine je } \omega_5 = \omega_6 = \frac{v_E^D}{ED} = \frac{2,65 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,22 \text{ m}} = 12,04 \text{ s}^{-1}, \text{ a smer je određen}$$

smerom brzine  $\vec{v}_E^D$ .

Jednačine za ubrzanje

$$1. a_B = AB \cdot \omega_2^2 = 0,2 \text{ m} \cdot (20 \text{ s}^{-1})^2 = 80 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ gde je: } \vec{a}_B \parallel AB \text{ u smeru ka tački A.}$$

$$2. \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn}^B + \vec{a}_{Ct}^B,$$

$$3. a_{Cn}^B = \frac{(v_C^B)^2}{CB} = \frac{(0)^2}{0,4 \text{ m}} = 0, \quad \vec{a}_{Cn}^B \parallel CB \text{ u smeru ka tački B i } \vec{a}_{Ct}^B \perp CB,$$

$$4. \vec{a}_C \parallel x - x,$$

$$5. \vec{a}_D = \vec{a}_C,$$

$$6. \vec{a}_{D6} = \vec{a}_D + \vec{a}_{k1} + \vec{a}_{D6}^D, \quad \vec{a}_{D6}^D \parallel FE,$$

$$\vec{a}_{k1} = 2 \cdot \omega_6 \cdot v_{D6}^D = 2 \cdot 10,27 \text{ s}^{-1} \cdot 1,35 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 27,73 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$7. \vec{a}_{D6} = \vec{a}_F + \vec{a}_{D6n}^F + \vec{a}_{D6t}^F,$$

$$\vec{a}_{D6}^F \parallel DF \text{ u smeru ka tački F, } a_{D6n}^F = \frac{(v_{D6}^F)^2}{DF} = \frac{(2,75 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{0,23 \text{ m}} = 32,88 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_{D6t}^F \perp DF,$$

$$8. \vec{a}_{E6} = \vec{a}_{D6} + \vec{a}_{E6n} + \vec{a}_{E6t},$$

$$\vec{a}_{E6}^D // ED \text{ u smeru ka tački } D, a_{E6n}^D = \frac{(v_{E6}^D)^2}{ED} = \frac{\left(2,65 \frac{m}{s}\right)^2}{0,22 m} = 31,92 \frac{m}{s^2}, \vec{a}_{E6t}^D \perp DF,$$

$$9. \vec{a}_{E6} = \vec{a}_F + \vec{a}_{E6n}^F + \vec{a}_{E6t}^F,$$

$$\vec{a}_{E6}^F // EF \text{ u smeru ka tački } F, a_{E6n}^F = \frac{(v_{E6}^F)^2}{EF} = \frac{\left(2,26 \frac{m}{s}\right)^2}{0,18 m} = 28,37 \frac{m}{s^2}, \vec{a}_{E6t}^F \perp \overline{EF},$$

$$10. \vec{a}_E = \vec{a}_{E6} + \vec{a}_{k2} + \vec{a}_E^{E6}, a_E // FE,$$

$$a_{k2} = 2 \cdot \omega_6 \cdot v_E^{E6} = 2 \cdot 10,27 s^{-1} \cdot 1,35 \frac{m}{s} = 27,73 \frac{m}{s^2},$$

$$11. \vec{a}_E = \vec{a}_D + \vec{a}_{En}^D + \vec{a}_{Et}^D,$$

$$\vec{a}_{En}^D // DE \text{ u smeru ka tački } D, a_{En}^D = \frac{(v_E^D)^2}{DE} = \frac{\left(2,65 \frac{m}{s}\right)^2}{0,22 m} = 31,92 \frac{m}{s^2}, \vec{a}_{Et}^D \perp DE.$$

Intenziteti ubrzanja

$$\text{Razmera za plan ubrzanja je } U_a = \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}}, \text{ iz kojeg su određuju intenziteti ubrzanja:}$$

$$a_C = a_D = \overline{P_a c'} \cdot U_a = 2,25 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 45 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{D6} = \overline{P_a d_6} \cdot U_a = 4,97 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 99,4 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{E6} = \overline{P_a e_6} \cdot U_a = 4,09 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 81,8 \frac{m}{s^2},$$

$$a_E = \overline{P_a e} \cdot U_a = 6,33 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 126,6 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{Ct}^B = \overline{b'c'} \cdot U_a = 4,6 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 92 \frac{m}{s^2},$$

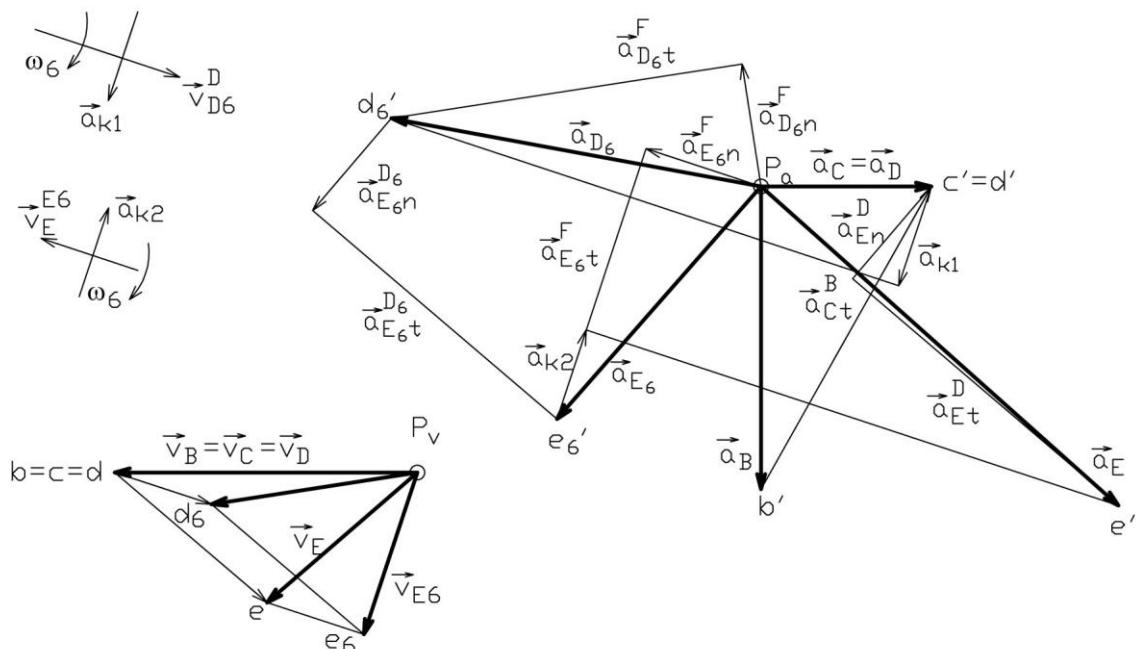
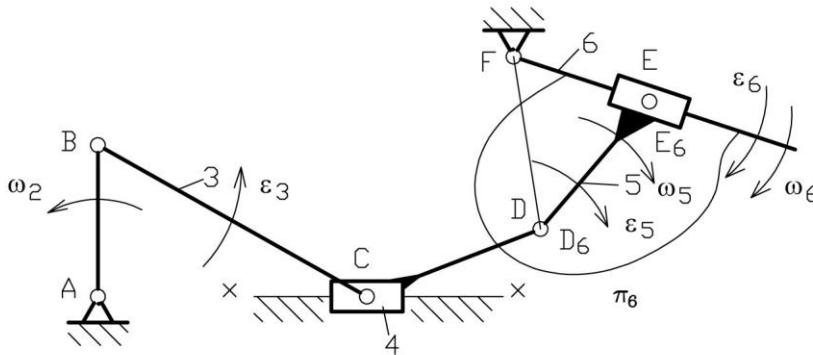
$$a_{Et}^D = \overline{ne} \cdot U_a = 4,62 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 92,4 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{E6t}^F = \overline{ne_6} \cdot U_a = 3,72 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{0,5 \text{ cm}} = 74,4 \frac{m}{s^2}.$$

Ugaona ubrzanja

Ugaono ubrzanje  $\varepsilon_3 = \frac{a_{Ct}^B}{BC} = \frac{92 \frac{m}{s^2}}{0,41 m} = 224,4 s^{-2}$ , u smeru suprotnom od kretanja kazaljke na satu.

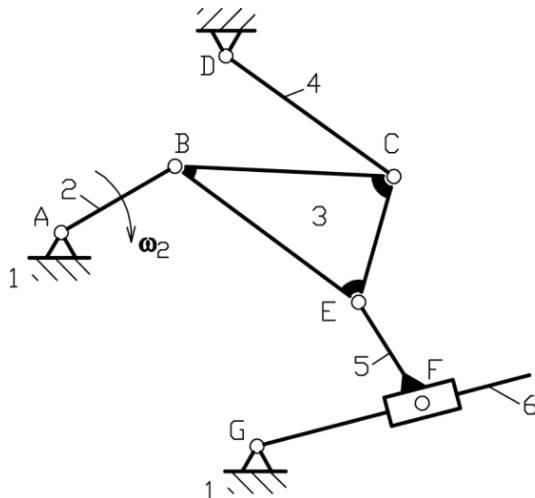
Ugaono ubrzanje  $\varepsilon_5 = \varepsilon_6 = \frac{a_{Et}^D}{ED} = \frac{92,4 \frac{m}{s^2}}{0,22 m} = 420 s^{-2}$ , u smeru kretanja kazaljke na satu.



### Zadatak 3.3.

Geometrijski podaci mehanizma dati su na kinematičkoj šemi koja nacrtanoj u razmeri  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}}$ . Pogonski član 2 se obrće jednolikom ugaonom brzinom  $\omega_2 = 5 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti brzine kinematičkih tačaka, ubrzanje tačke E, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 6.

Preporučene razmere su  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}}$ .

**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 1,8 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,36 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,6 \text{ m}$$

$$\overline{BE} = 3,12 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,62 \text{ m}$$

$$\overline{CE} = 1,78 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,36 \text{ m}$$

$$\overline{DC} = 2,82 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,56 \text{ m}$$

$$\overline{FE} = 1,62 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,32 \text{ m}$$

$$\overline{FG} = 2,34 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{0,5 \text{ cm}} = 0,47 \text{ m}$$

**Jednačine za brzine**

$$1. \quad v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,36 \text{ m} \cdot 5 \text{ s}^{-1} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \quad \vec{v}_B \perp BA,$$

$$2. \quad \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C, \quad \vec{v}_C \perp BC,$$

$$3. \quad \vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_C, \quad \vec{v}_C \perp DC,$$

$$4. \quad \vec{v}_E = \vec{v}_B + \vec{v}_E, \quad \vec{v}_E \perp EB,$$

$$5. \quad \vec{v}_E = \vec{v}_C + \vec{v}_E, \quad \vec{v}_E \perp EC,$$

$$6. \quad \vec{v}_{E6} = \vec{v}_G + \vec{v}_{E6}, \quad \vec{v}_{E6} \perp E6G,$$

$$7. \quad \vec{v}_{E6} = \vec{v}_E + \vec{v}_{E6}, \quad \vec{v}_{E6} \parallel GF6,$$

$$8. \quad \vec{v}_{F6} = \vec{v}_G + \vec{v}_{F6}, \quad \vec{v}_{F6} \perp GF6,$$

$$9. \quad \vec{v}_{F6} = \vec{v}_{E6} + \vec{v}_{F6}, \quad \vec{v}_{F6} \perp F6E6,$$

$$10. \quad \vec{v}_F = \vec{v}_{F6} + \vec{v}_F, \quad \vec{v}_F \parallel GF,$$

---


$$11. \vec{v}_F = \vec{v}_E + \vec{v}_F^E, \vec{v}_F^E \perp FE.$$

Intenziteti brzina

Razmera za plan brzina je  $U_v = \frac{1 \text{ m/s}}{2 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti brzina:

$$v_C = \overline{P_v c} \cdot U_v = 3,63 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,81 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 5,9 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,95 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^B = \overline{c b} \cdot U_v = 6,1 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 3,05 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^D = \overline{cd} \cdot U_v = 3,63 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,81 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E^B = \overline{eb} \cdot U_v = 6,33 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 3,16 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E^C = \overline{ec} \cdot U_v = 3,60 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_F^E = \overline{fe} \cdot U_v = 1,70 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 0,85 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{E6}^E = \overline{e_6 e} \cdot U_v = 6,32 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 3,16 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{F6}^{E6} = \overline{f_6 e_6} \cdot U_v = 0,47 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 0,235 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{F6} = \overline{P_v f_6} \cdot U_v = 0,675 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 0,337 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_F = \overline{P_v f} \cdot U_v = 6,36 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 3,18 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$


---

Ugaone brzine članova 3 i 6

$$\omega_3 = \frac{v_C^B}{CB} = \frac{3,05 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,6 \text{ m}} = 5,08 \text{ s}^{-1}, \text{ a smer je dat na slici.}$$

$$\omega_6 = \frac{v_{F6}}{GF_6} = \frac{0,337 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,48 \text{ m}} = 0,70 \text{ s}^{-1}$$


---

Jednačine za ubrzanja

$$1. \vec{a}_B = AB \cdot \omega_2^2 = 0,36m \cdot (5s^{-1})^2 = 9 \frac{m}{s^2}, \text{ gde je: } \vec{a}_B \parallel \overline{AB} \text{ u smeru ka tački A}$$

$$2. \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}, \vec{a}_{Cn} \parallel CB \text{ od tačke C ka B, } \vec{a}_{Ct} \perp CB,$$

$$a_{Cn}^B = \frac{(v_C^B)^2}{CB} = \frac{\left(3,05 \frac{m}{s}\right)^2}{0,6m} = 15,5 \frac{m}{s^2},$$

$$3. \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}, \vec{a}_{Cn} \parallel CD \text{ od tačke C ka D, } \vec{a}_{Ct} \perp CD,$$

$$a_{Cn}^D = \frac{(v_C^D)^2}{CD} = \frac{\left(1,81 \frac{m}{s}\right)^2}{0,56m} = 5,85 \frac{m}{s^2},$$

$$4. \vec{a}_E = \vec{a}_B + \vec{a}_{En} + \vec{a}_{Et}, \vec{a}_{En} \parallel EB \text{ od tačke C ka B, } \vec{a}_{Et} \perp EB,$$

$$a_{En}^B = \frac{(v_E^B)^2}{EB} = \frac{\left(3,16 \frac{m}{s}\right)^2}{0,624m} = 16,00 \frac{m}{s^2},$$

$$5. \vec{a}_E = \vec{a}_C + \vec{a}_{En} + \vec{a}_{Et}, \vec{a}_{En} \parallel EB \text{ od tačke C ka B, } \vec{a}_{Et} \perp EB,$$

$$a_{En}^C = \frac{(v_E^C)^2}{EC} = \frac{\left(1,8 \frac{m}{s}\right)^2}{0,356m} = 9,1 \frac{m}{s^2},$$

$$6. \vec{a}_{E6} = \vec{a}_G + \vec{a}_{E6n} + \vec{a}_{E6t}, \vec{a}_{E6n} \parallel EG \text{ od tačke E}_6 \text{ ka G, } \vec{a}_{E6t} \perp EG,$$

$$a_{E6n}^G = \frac{(v_{E6}^G)^2}{E_6G} = \frac{\left(0,345 \frac{m}{s}\right)^2}{0,48m} = 0,25 \frac{m}{s^2},$$

$$7. \vec{a}_{E6} = \vec{a}_E + \vec{a}_{k1} + \vec{a}_{E6},$$

$$a_{k1} = 2 \cdot \omega_6 \cdot v_{E6}^E = 2 \cdot 0,7s^{-1} \cdot 3,16 \frac{m}{s} = 4,42 \frac{m}{s^2},$$

$$8. \vec{a}_{F6} = \vec{a}_G + \vec{a}_{F6n} + \vec{a}_{F6t}, \vec{a}_{F6n} \parallel FG \text{ od tačke F}_6 \text{ ka G, } \vec{a}_{F6t} \perp FG,$$

$$a_{F6n}^G = \frac{(v_{F6}^G)^2}{F_6G} = \frac{\left(0,337 \frac{m}{s}\right)^2}{0,47m} = 0,25 \frac{m}{s^2},$$

$$9. \vec{a}_{F6} = \vec{a}_{E6} + \vec{a}_{F6n} + \vec{a}_{F6t}, \vec{a}_{F6n} \parallel EF \text{ od F ka E, } \vec{a}_{F6t} \perp EF,$$

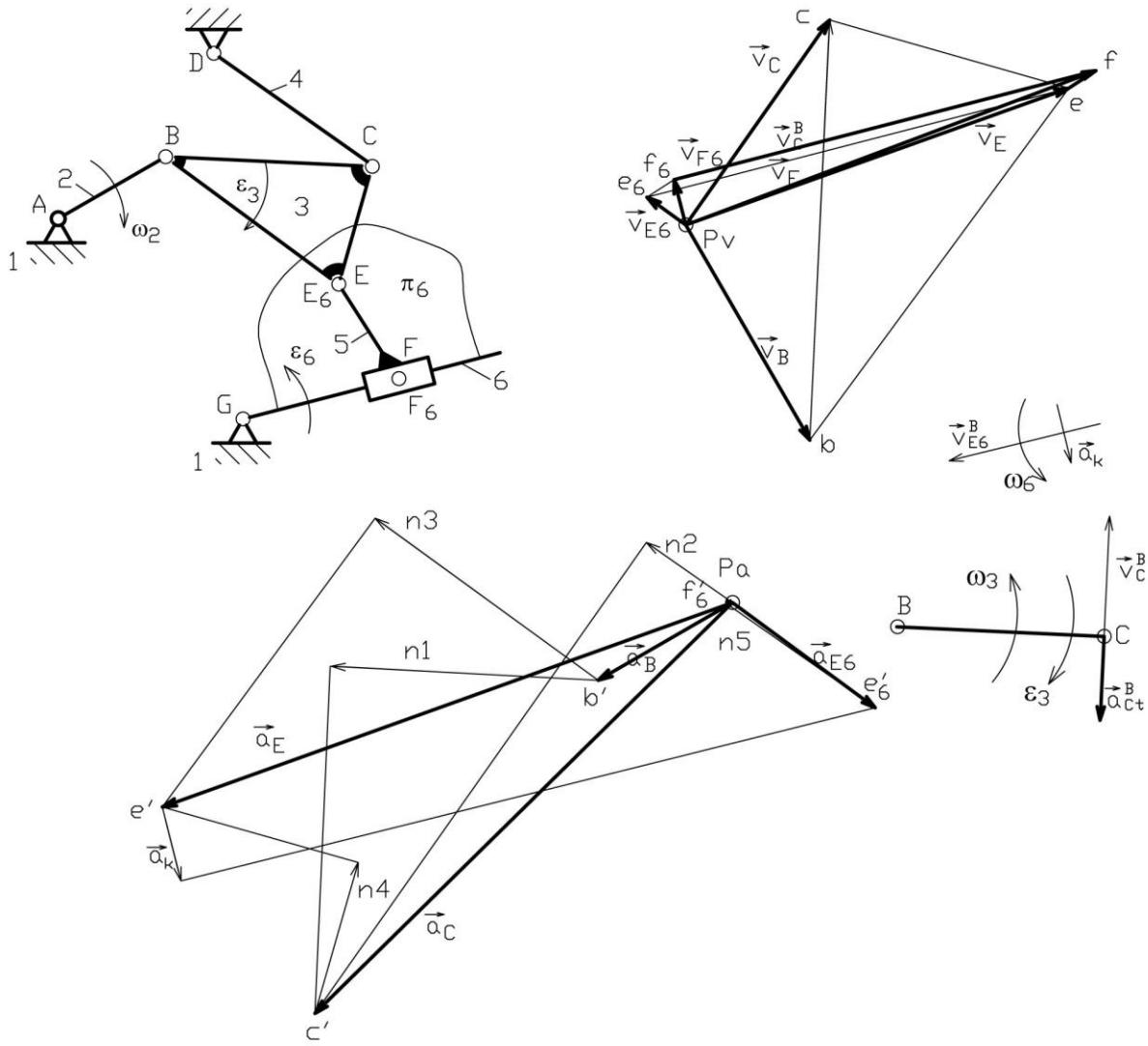
$$a_{F6n}^{E6} = \frac{(v_{F6}^{E6})^2}{F_6E_6} = \frac{\left(0,235 \frac{m}{s}\right)^2}{0,32m} = 0,17 \frac{m}{s^2}.$$

Ugaono ubrzanje članova 3 i 6

$$\epsilon_3 = \frac{a_{Ct}^B}{CB} = \frac{20,16 \frac{m}{s^2}}{0,6m} = 33,6 s^{-2}, \text{ a smer je dat na slici,}$$

$$a_{Ct}^B = \overline{n_1 c} \cdot U_a = 5,04 \text{ cm} \cdot \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}} = 20,16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\varepsilon_6 = \frac{a_{F6t}^G}{F_6 G} = \frac{0,12 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,46 \text{ m}} = 0,26 \text{ s}^{-2}.$$

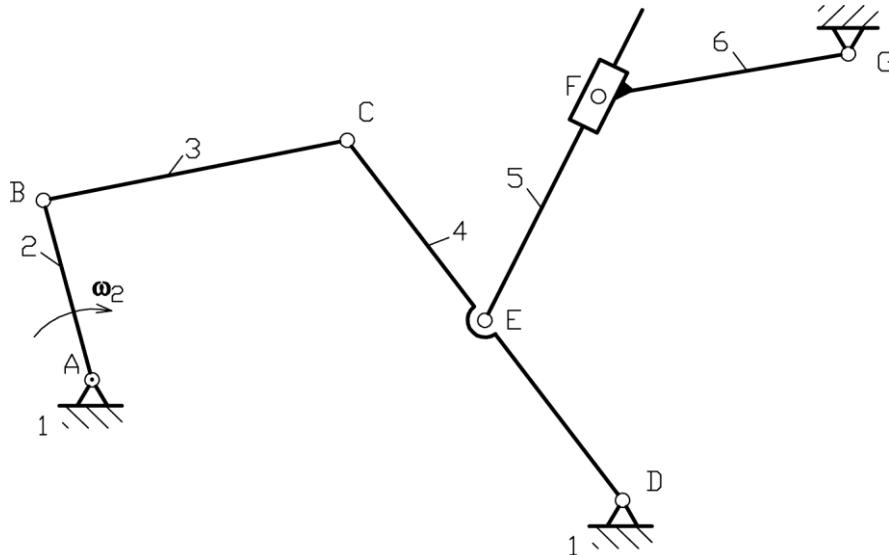


### Zadatak 3.4.

Geometrijski podaci mehanizma dati su na kinematičkoj šemi koja nacrtanoj u razmeri  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ . Pogonski član 2 se obrće jednolikom ugaonom brzinom  $\omega_2 = 15 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti

brzinu tačke F, ubrzanje tačke E, i ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 4. Preporučene

$$\text{razmere su } U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}.$$



### Rešenje zadatka

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 2,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{cm}}{\text{cm}}}{1 \text{ cm}} = 0,25 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 4,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{cm}}{\text{cm}}}{1 \text{ cm}} = 0,41 \text{ m}$$

$$\overline{CE} = 3,02 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{cm}}{\text{cm}}}{1 \text{ cm}} = 0,302 \text{ m}$$

$$\overline{ED} = 3,02 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{cm}}{\text{cm}}}{1 \text{ cm}} = 0,302 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = 3,4 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{cm}}{\text{cm}}}{1 \text{ cm}} = 0,34 \text{ m}$$

$$\overline{FG} = 3,3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{cm}}{\text{cm}}}{1 \text{ cm}} = 0,33 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,25 \text{ m} \cdot 15 \text{ s}^{-1} = 3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \vec{v}_B \perp BA,$$

$$2. \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C^B, \vec{v}_C^B \perp BC,$$

$$3. \vec{v}_C \perp CD,$$

$$4. \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{cP_v}}{\overline{ce}} \Rightarrow \overline{ce} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{P_v c}}{\overline{CD}} = \frac{0,302 \text{ m} \cdot 8,3 \text{ cm}}{0,605 \text{ m}} = 4,15 \text{ cm},$$

$$5. \vec{v}_{G5} = \vec{v}_G + \vec{v}_{G5}, \vec{v}_{G5} \parallel EF5,$$

$$6. \vec{v}_{G5} = \vec{v}_E + \vec{v}_{G5}, \vec{v}_{G5} \perp G5E,$$

$$7. \vec{v}_{F5} = \vec{v}_E + \vec{v}_{F5}, \vec{v}_{F5} \perp F5E,$$

$$8. \vec{v}_F = \vec{v}_{G5} + \vec{v}_{F5}, \vec{v}_{F5} \perp F5G5,$$

$$9. \vec{v}_F = \vec{v}_{F5} + \vec{v}_{F5}, \vec{v}_F \parallel EF5,$$

$$10. \vec{v}_F = \vec{v}_G + \vec{v}_F, \vec{v}_F \perp FG.$$

Intenziteti brzina

$$v_C = \overline{P_v c} \cdot U_v = 8,3 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 4,15 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 4,15 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,07 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_F = \overline{P_v f} \cdot U_v = 1,16 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 0,58 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^B = \overline{c b} \cdot U_v = 3,1 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugaona brzina člana

$$\omega_4 = \frac{v_C}{DC} = \frac{4,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,6 \text{ m}} = 6,91 \text{ s}^{-1}, \text{ smer je određen na osnovu smera brzine tačke C.}$$

Jednačine za ubrzanja

$$1. a_B = AB \cdot \omega_2^2 = 0,25 \text{ m} \cdot (15 \text{ s}^{-1})^2 = 56,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ gde je: } \vec{a}_B \parallel AB \text{ u smeru ka tački A}$$

$$2. \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}, \vec{a}_{Cn} \parallel BC \text{ usmereno od C ka B,}$$

$$a_{Cn}^B = \frac{(v_C^B)^2}{CB} = \frac{\left(1,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,4 \text{ m}} = 6,05 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$3. \vec{a}_C = \vec{a}_D + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct},$$

$$a_{Cn}^D = \frac{(v_C^D)^2}{CD} = \frac{\left(4,15 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}\right)^2}{0,6 \text{ m}} = 28,70 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$4. \frac{\overline{CD}}{\overline{CE}} = \frac{\overline{c d}}{\overline{c e}} \Rightarrow \frac{\overline{c e}}{\overline{c e}} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{c d}}{\overline{CD}} = \frac{0,302 \text{ m} \cdot 3,3 \text{ cm}}{0,605 \text{ m}} = 1,65 \text{ cm}.$$

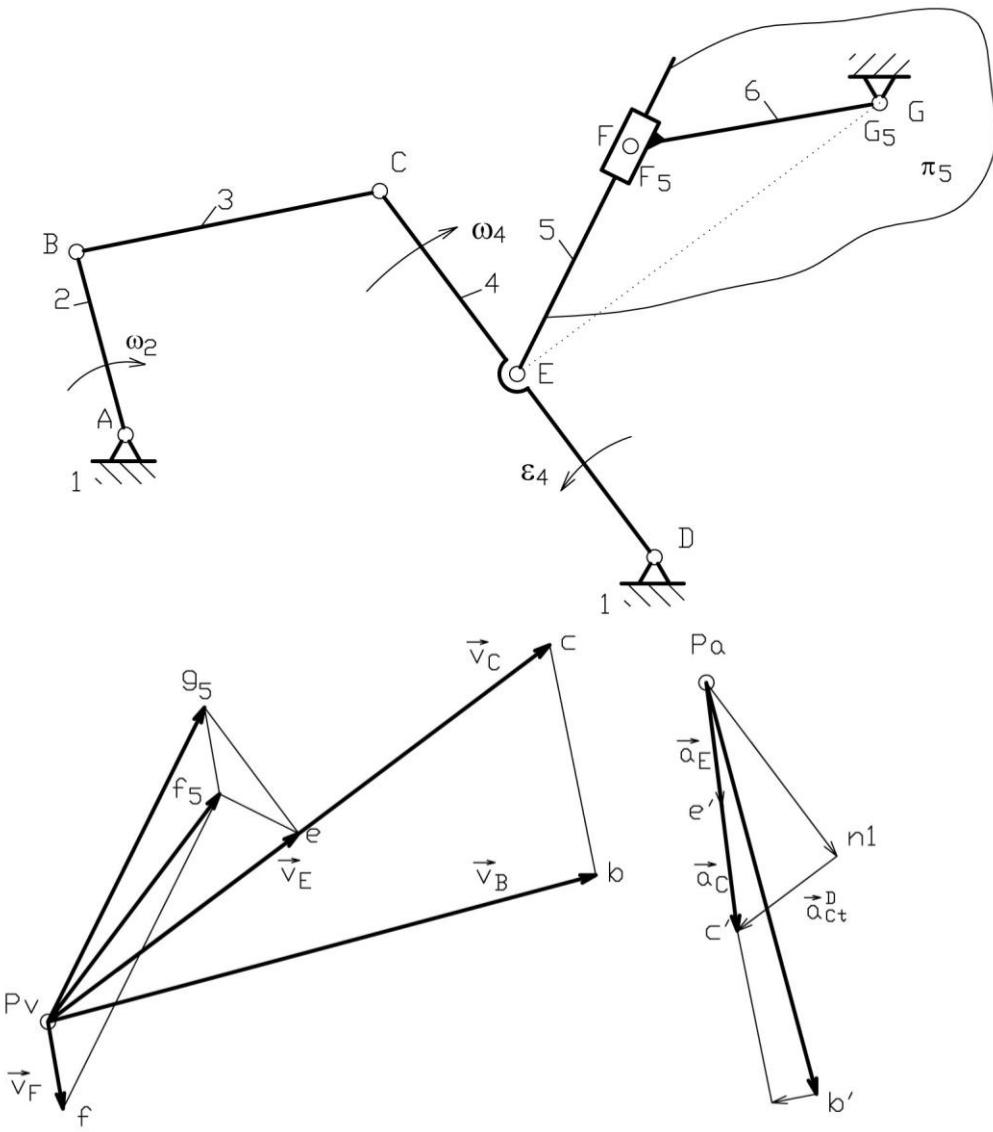
Intenzitet ubrzanja tačke E

$$a_E = \overline{P_a e} \cdot U_a = 1,653 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}} = 16,53 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Ugaono ubrzanje člana 4

$$a_{Ct}^D = \overline{n_1 c} \cdot U_a = 1,645 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}} = 16,45 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\varepsilon_4 = \frac{a_{Ct}^D}{CD} = \frac{20,16 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,605} = 33,32 \text{ s}^{-2}, \text{ a smer je dat na slici.}$$

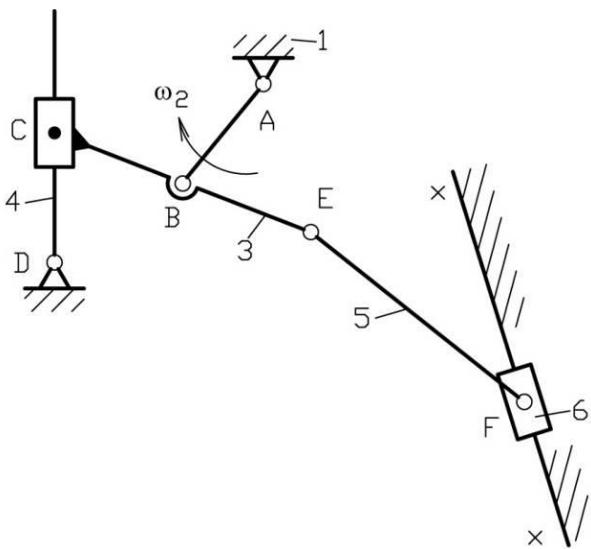


**Zadatak 3.5.**

Odrediti brzine i ubrzanja kinematičkih tačaka, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 5.

Dati su podaci:  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ ,  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$ . Preporučene razmere su:  $U_v = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ cm}}$  i

$$U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}.$$

**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{DC} = 1,7 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,17 \text{ m}$$

$$\overline{CB} = 18,3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,183 \text{ m}$$

$$\overline{BE} = 18,3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,183 \text{ m}$$

$$\overline{AB} = 13,32 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,17 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = 3,62 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,362 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,17 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 1,7 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$2. \vec{v}_{B4} = \vec{v}_B + \vec{v}_{B4}, \quad \vec{v}_{B4} \parallel CD,$$

$$3. \vec{v}_{B4} = \vec{v}_D + \vec{v}_{B4}, \quad \vec{v}_{B4} \perp BD,$$

$$4. \vec{v}_{C4} = \vec{v}_{B4} + \vec{v}_{C4}, \quad \vec{v}_{C4} \perp CB,$$

$$5. \vec{v}_{C4} = \vec{v}_D + \vec{v}_{C4}, \quad \vec{v}_{C4} \perp CD,$$

$$6. \vec{v}_C = \vec{v}_{C4} + \overset{\rightarrow}{v}_{C4}, \vec{v}_C \parallel CD,$$

$$7. \vec{v}_C = \vec{v}_B + \overset{\rightarrow}{v}_C, \vec{v}_C \perp CB,$$

$$8. \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{ce}}{\overline{cb}} \Rightarrow \overline{ce} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{cb}}{\overline{CB}} = \frac{36,6\text{cm} \cdot 4,61\text{cm}}{18,3\text{cm}} = 9,22\text{cm},$$

$$9. \vec{v}_F = \vec{v}_E + \overset{\rightarrow}{v}_F, \vec{v}_F \perp FE,$$

$$10. \vec{v}_F \parallel x - x.$$

Intenziteti brzina

$$v_C = \overline{P_v C} \cdot U_v = 4,8\text{cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{cm}} = 2,4\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_F = \overline{P_v f} \cdot U_v = 5,79\text{cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{cm}} = 2,89\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 6,52\text{cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{cm}} = 3,26\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{F'}^E = \overline{fe} \cdot U_v = 1,17\text{cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{cm}} = 0,585\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{C4}^B = \overline{P_v b_4} \cdot U_v = 2,7\text{cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{cm}} = 1,35\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^{C4} = \overline{cc_4} \cdot U_v = 2,16\text{cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{cm}} = 1,08\frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_{B4}^B = \overline{bb_4} \cdot U_v = 2,16\text{cm} \cdot \frac{1\frac{\text{m}}{\text{s}}}{2\text{cm}} = 1,08\frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugaone brzine člana 4 i 5

$$\omega_4 = \frac{v_{C4}^D}{CD} = \frac{2,15\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,17\text{m}} = 12,65\text{s}^{-1}, \omega_5 = \frac{v_F^E}{EF} = \frac{0,585\frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,36\text{m}} = 1,625\text{s}^{-1}.$$

Jednačine za ubrzanja

$$1. a_B = AB \cdot \omega_2^2 = 0,17\text{m} \cdot (10\text{s}^{-1})^2 = 17\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$2. \vec{a}_{B4} = \vec{a}_B + \vec{a}_{k1} + \overset{\rightarrow}{a}_{B4}, a_{k1} = 2 \cdot \omega_4 \cdot v_{B4}^B = 2 \cdot 12,65\text{s}^{-1} \cdot 1,08\frac{\text{m}}{\text{s}} = 27,3\frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$\overset{\rightarrow}{a}_{B4} \parallel CD,$$

$$3. \vec{a}_{B4} = \vec{a}_D + \vec{a}_{B4n} + \vec{a}_{B4t}, a_{B4n}^D = \frac{(v_{B4}^D)^2}{DB_4} = \frac{\left(2,5 \frac{m}{s}\right)^2}{0,2 m} = 31,25 \frac{m}{s^2} \vec{a}_{B4n} // BD,$$

$\vec{a}_{B4t}^D \perp BD$ ,

$$4. \vec{a}_{C4} = \vec{a}_{B4} + \vec{a}_{C4n} + \vec{a}_{C4t}, a_{C4n}^{B4} = \frac{(v_{C4}^{B4})^2}{CB_4} = \frac{\left(2,3 \frac{m}{s}\right)^2}{0,183 m} = 28,9 \frac{m}{s^2} \vec{a}_{C4n} // CB,$$

$\vec{a}_{C4t}^{B4} \perp CB$ ,

$$5. \vec{a}_{C4} = \vec{a}_D + \vec{a}_{C4n} + \vec{a}_{C4t}, a_{C4n}^D = \frac{(v_{C4}^D)^2}{CD} = \frac{\left(2,15 \frac{m}{s}\right)^2}{0,17 m} = 27,19 \frac{m}{s^2} \vec{a}_{C4n} // CD,$$

$\vec{a}_{C4t}^D \perp CD$ ,

$$6. \vec{a}_C = \vec{a}_{C4} + \vec{a}_{k2} + \vec{a}_C^{C4}, a_{k2} = 2 \cdot \omega_4 \cdot v_C^{C4} = 2 \cdot 12,65 s^{-1} \cdot 1,08 \frac{m}{s} = 27,3 \frac{m}{s^2},$$

$$7. \vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}, a_{Cn}^B = \frac{(v_C^B)^2}{CB} = \frac{\left(2,3 \frac{m}{s}\right)^2}{0,183 m} = 28,9 \frac{m}{s^2} \vec{a}_{Cn} // CB, \vec{a}_{Ct}^D \perp CB,$$

$$8. \frac{\overline{CE}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{c'e'}}{\overline{c'b'}} \Rightarrow \overline{c'e'} = \frac{\overline{CE} \cdot \overline{c'b'}}{\overline{CB}} = \frac{36,6 \text{ cm} \cdot 7,83 \text{ cm}}{18,3 \text{ cm}} = 15,6 \text{ cm},$$

$$9. \vec{a}_F = \vec{a}_E + \vec{a}_{Fn} + \vec{a}_{Ft}, a_{Fn}^E = \frac{(v_F^E)^2}{EF} = \frac{\left(0,585 \frac{m}{s}\right)^2}{0,36 m} = 0,95 \frac{m}{s^2},$$

10.  $\vec{a}_F // x - x$ .

Vrednosti ubrzanja tačaka člana 5

$$a_E = \overline{P_a e'} \cdot U_a = 2,35 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 23,5 \frac{m}{s^2},$$

$$a_F = \overline{P_a f'} \cdot U_a = 2,8 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 28 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{B4} = \overline{P_a b_4'} \cdot U_a = 3,65 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 36,5 \frac{m}{s^2},$$

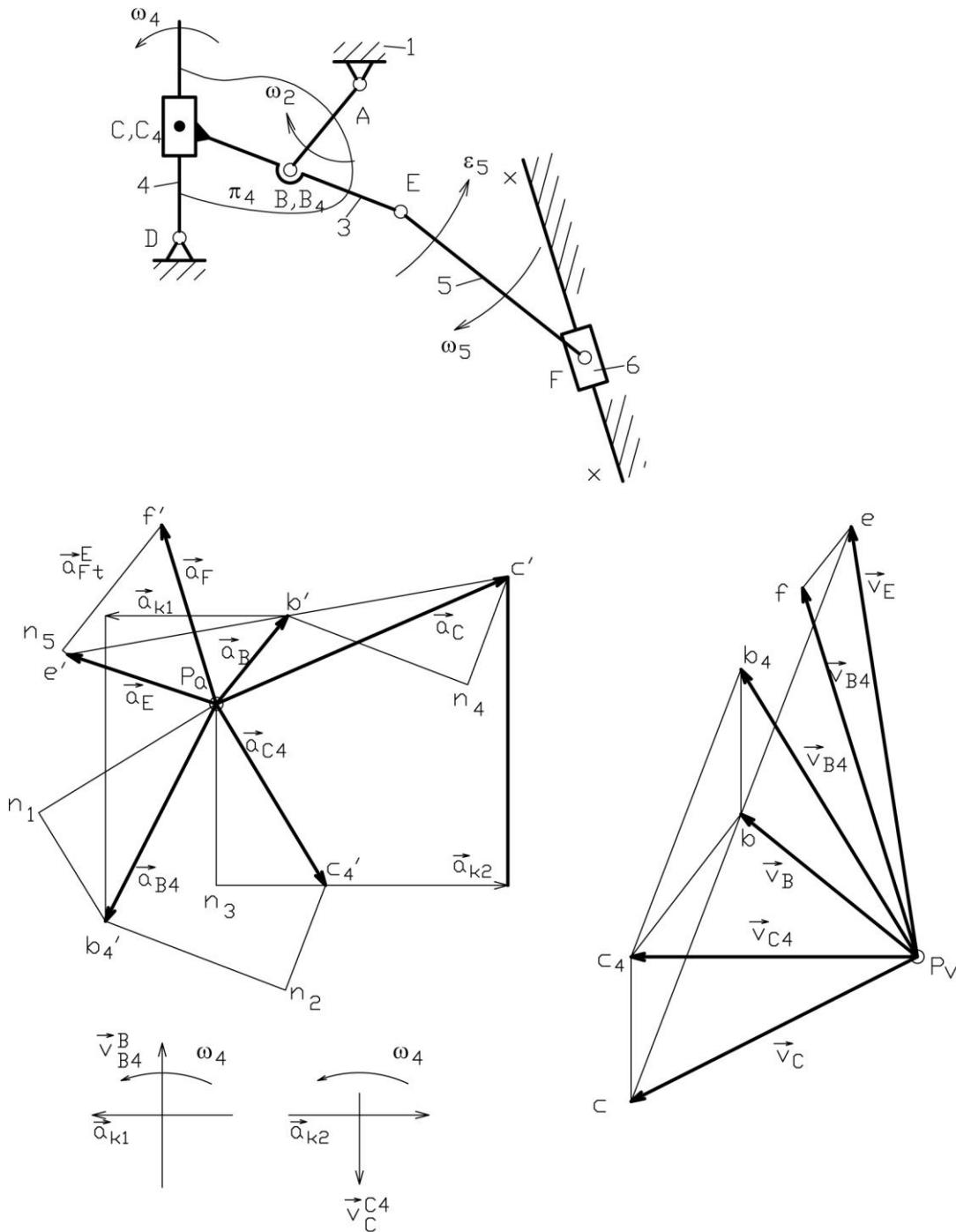
$$a_{C4} = \overline{P_a c_4'} \cdot U_a = 3,17 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 31,7 \frac{m}{s^2},$$

$$a_C = \overline{P_a c'} \cdot U_a = 6,62 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m}{s^2}}{1 \text{ cm}} = 66,2 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{Ft}^E = \overline{n_5 f'} \cdot U_a = 2,39 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ m/s}^2}{1 \text{ cm}} = 23,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Intenzitet ugaonog ubrzanja

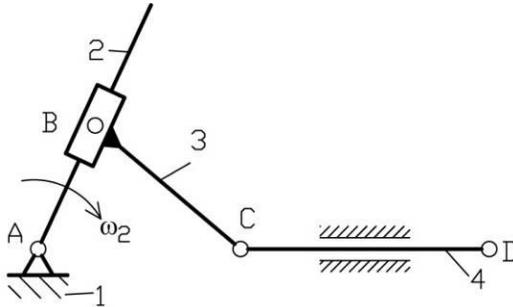
$$\varepsilon_5 = \frac{a_{Ft}^E}{FE} = \frac{23,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,36 \text{ m}} = 66,38 \text{ s}^{-2}$$



### Zadatak 3.6.

Za mehanizam je poznata ugaona brzina člana 2,  $\omega_2 = 20 \text{ s}^{-1}$ , ugaono ubrzanje člana 2,  $\varepsilon_2 = 0 \text{ s}^{-2}$  a geometrijske vrednosti zadate su razmerom  $U_L = \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ mm}}$ . Odrediti brzine tačaka B i D, ubrzanje tačke D. Preporučene razmere su:  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}$ .

tačaka B i D, ubrzanje tačke D. Preporučene razmere su:  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}$ .



### Rešenje zadatka

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 18 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ mm}} = 0,18 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 25,3 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ mm}} = 0,253 \text{ m}$$

$$\overline{AC} = 27 \text{ mm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ mm}} = 0,27 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 33,1 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m}}{100 \text{ mm}} = 0,331 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. v_{B2} = AB \cdot \omega_2 = 0,18 \text{ m} \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 3,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \vec{v}_{B2} \perp BA,$$

$$2. v_{C2} = AC \cdot \omega_2 = 0,253 \text{ m} \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 5,06 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \vec{v}_{C2} \perp AC,$$

$$3. \vec{v}_C = \vec{v}_{C2} + \vec{v}_C^{C2}, \vec{v}_C^{C2} // AB,$$

$$4. \vec{v}_C // CD,$$

$$5. \vec{v}_D = \vec{v}_C,$$

$$6. \vec{v}_B = \vec{v}_{B2} + \vec{v}_B^{B2}, \vec{v}_B^{B2} // AB,$$

$$7. \vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_B^{C}, \vec{v}_B^{C} \perp BC.$$

Intenziteti brzina

Razmera za plan brzina je  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti brzina

$$v_B = \overline{P_v b} \cdot U_v = 7,8 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 7,8 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_D = \overline{P_v d} \cdot U_v = 2,2 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 2,2 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^{C2} = \overline{cc_2} \cdot U_v = 5,58 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 5,58 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_B^C = \overline{bc} \cdot U_v = 6,22 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}} = 6,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugaona brzina člana 3 je

$$\omega_3 = \frac{v_B^C}{BC} = \frac{6,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,25 \text{ m}} = 24,88 \text{ s}^{-1}, \text{ a smer je u smeru kretanja kazaljke na satu.}$$

Plan ubrzanja

$$1. \quad a_{B2} = AB \cdot \omega_2^2 = 0,18 \text{ m} \cdot (20 \text{ s}^{-1})^2 = 72 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ gde je: } \vec{a}_B \parallel AB \text{ u smeru ka tački A,}$$

$$2. \quad a_{C2} = AC_2 \cdot \omega_2^2 = 0,25 \text{ m} \cdot (20 \text{ s}^{-1})^2 = 101,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$3. \quad \vec{a}_C = \vec{a}_{C2} + \vec{a}_{k1} + \vec{a}_C^{C2}, \text{ gde je } a_{k1} = 2 \cdot \omega_2 \cdot v_C^{C2} = 2 \cdot 20 \text{ s}^{-1} \cdot 5,58 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 223,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$4. \quad \vec{a}_C \parallel CD,$$

$$5. \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{B2} + \vec{a}_{k2} + \vec{a}_B^{B2}, \text{ gde je } a_{k2} = 2 \cdot \omega_2 \cdot v_B^{B2} = 2 \cdot 20 \text{ s}^{-1} \cdot 6,93 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 277,2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$6. \quad \vec{a}_B = \vec{a}_C + \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt}, \text{ gde je: } \vec{a}_{Bn}^C \parallel CB \text{ u smeru ka tački C,}$$

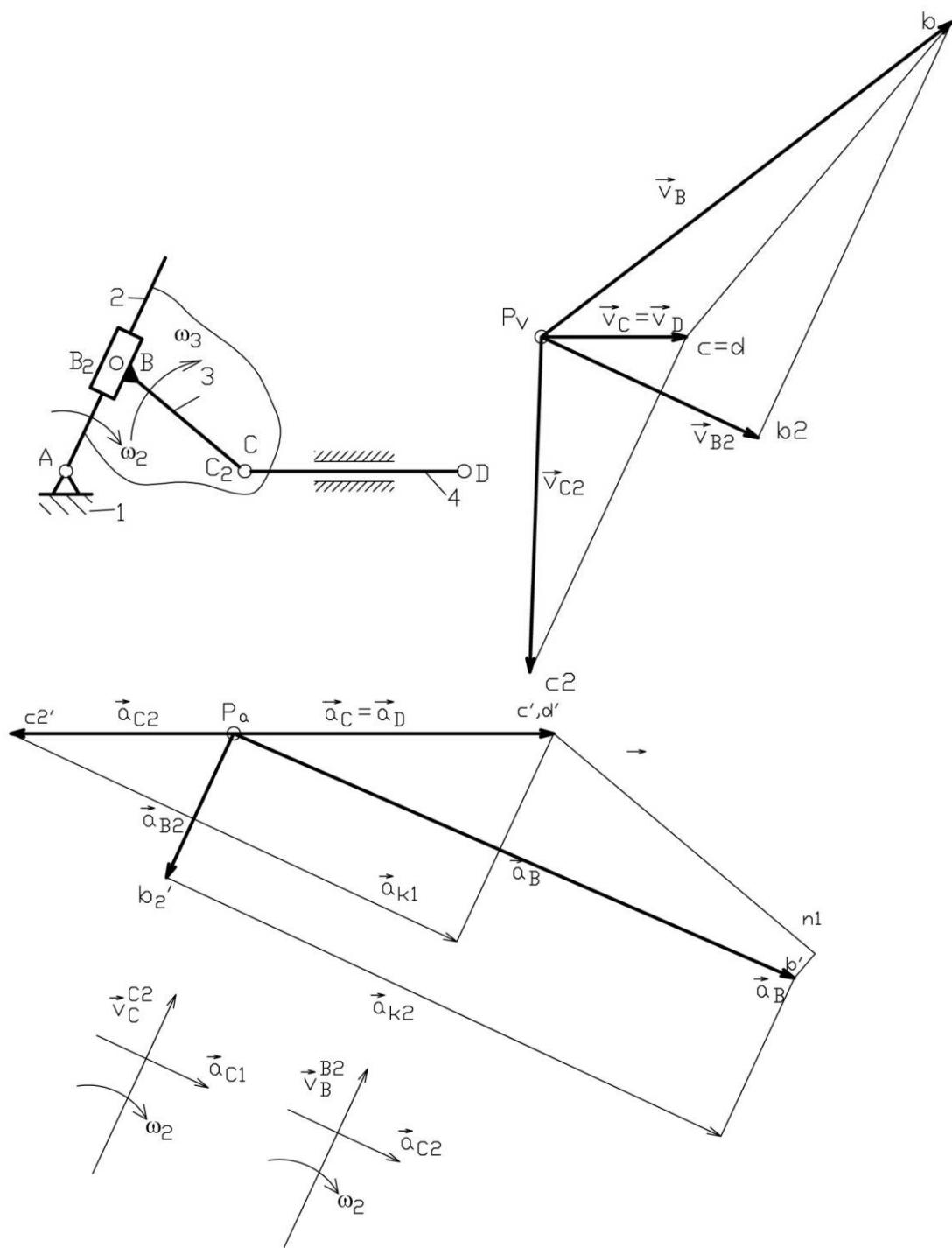
$$a_{Bn}^C = \frac{(v_B^C)^2}{BC} = \frac{\left(6,22 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,25 \text{ m}} = 154,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \quad \vec{a}_{Bt} \perp BC,$$

$$7. \quad \vec{a}_D = \vec{a}_C.$$

**Intenzitet ubrzanja**

Razmera za plan ubrzanja je  $U_a = \frac{30 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti ubrzanja:

$$a_D = \overline{P_a d} \cdot U_a = 4,83 \text{ cm} \cdot \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,5 \text{ cm}} = 144,9 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

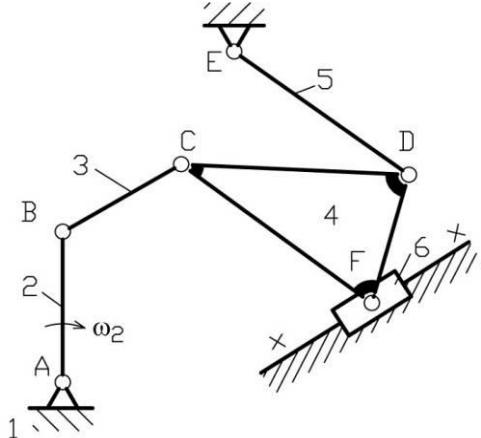


## 4. Određivanje kinematičkih parametara po Asuru

### Zadatak 4.1.

Geometrijski podaci mehanizma dati su na kinematičkoj šemi nacrtanoj u razmeri  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$ . Pogonski član 2 se obrće jednolikom ugaonom brzinom  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$ . Odrediti brzine naznačnih tačaka, ubrzanje tačke D, ugaonu brzinu člana 4 i ugaono ubrzanje člana 5.

Preporučene razmere su  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}$ .



### Rešenje zadatka

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,2 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 1,8 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,18 \text{ m}$$

$$\overline{CF} = 3,1 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,31 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 3 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,3 \text{ m}$$

$$\overline{DF} = 1,8 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,18 \text{ m}$$

$$\overline{ED} = 2,8 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,28 \text{ m}$$

$$\overline{SF} = 2,86 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,286 \text{ m}$$

$$\overline{SC} = 1,13 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,286 \text{ m}$$

$$\overline{DS} = 2,14 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,214 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

1.  $v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,20 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\vec{v}_B \perp BA$ ,
2.  $\vec{v}_S = \vec{v}_B + \vec{v}_C + \vec{v}_S$ ,  $v_C, v_S \perp CS$ ,
3.  $\vec{v}_S = \vec{v}_{F1} + \vec{v}_F + \vec{v}_S$ ,  $v_F, v_S \perp SF$ ,
4.  $\vec{v}_D = \vec{v}_S + \vec{v}_D$ ,  $v_D \perp DS$ ,
5.  $\vec{v}_D = \vec{v}_E + \vec{v}_D$ ,  $v_D \perp DE$ ,
6.  $\vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C$ ,  $v_C \perp CB$ ,
7.  $\vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_C$ ,  $v_C \perp CD$ ,
8.  $\vec{v}_F = \vec{v}_C + \vec{v}_F$ ,  $v_F \perp FC$ ,
9.  $\vec{v}_F // x - x$ .

Intenziteti brzina

$$v_C = \overline{P_v c} \cdot U_v = 4,2 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,1 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_D = \overline{P_v d} \cdot U_v = 7,8 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 3,9 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_F = \overline{P_v f} \cdot U_v = 9,85 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 4,92 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^D = \overline{cd} \cdot U_v = 6,7 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 3,35 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_C^B = \overline{cb} \cdot U_v = 0,36 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 0,18 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_S^C = \overline{sc} \cdot U_v = 2,414 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,207 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_S^F = \overline{sf} \cdot U_v = 6,37 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 3,18 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_D^S = \overline{ds} \cdot U_v = 4,78 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 2,39 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_D^E = \overline{de} \cdot U_v = 3,9 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugaona brzina člana 4

$$\omega_4 = \frac{v_C^D}{CD} = \frac{3,35 \frac{m}{s}}{0,30 m} = 11,16 s^{-1}, \text{ smer je određen na osnovu smera relativne brzine tačke C}$$

u odnosu na D i pokazan na slici.

Jednačine za ubrzanja

$$1. a_B = AB \cdot \omega_2^2 = 0,20 m \cdot (10 s^{-1})^2 = 20 \frac{m}{s^2}, \text{ gde je } \vec{a}_B \parallel AB \text{ u smeru ka tački A}$$

$$2. \vec{a}_S = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Sn} + \vec{a}_{Ct} + \vec{a}_{St}, \vec{a}_{Cn}, \vec{a}_{Sn} \parallel CB, \vec{a}_{Ct}, \vec{a}_{St} \perp CB,$$

$$a_{Cn}^B = \frac{(v_C^B)^2}{CB} = \frac{\left(0,18 \frac{m}{s}\right)^2}{0,18 m} = 0,18 \frac{m}{s^2}, a_{Sn}^C = \frac{(v_S^C)^2}{SC} = \frac{\left(1,207 \frac{m}{s}\right)^2}{0,11 m} = 13,24 \frac{m}{s^2},$$

$$3. \vec{a}_S = \vec{a}_{F1} + \vec{a}_{Sn} + \vec{a}_{St} + \vec{a}_F, \vec{a}_{St}, \vec{a}_F \parallel x - x, \vec{a}_{Sn} \parallel SF,$$

$$a_{Sn}^F = \frac{(v_S^F)^2}{SF} = \frac{\left(3,18 \frac{m}{s}\right)^2}{0,28 m} = 36,11 \frac{m}{s^2},$$

$$4. \vec{a}_D = \vec{a}_S + \vec{a}_{Dn} + \vec{a}_{Dt}, \vec{a}_{Dn} \parallel SD, \vec{a}_{Dt} \perp SD, a_{Dn}^S = \frac{(v_D^S)^2}{DS} = \frac{\left(2,39 \frac{m}{s}\right)^2}{0,21 m} = 27,2 \frac{m}{s^2},$$

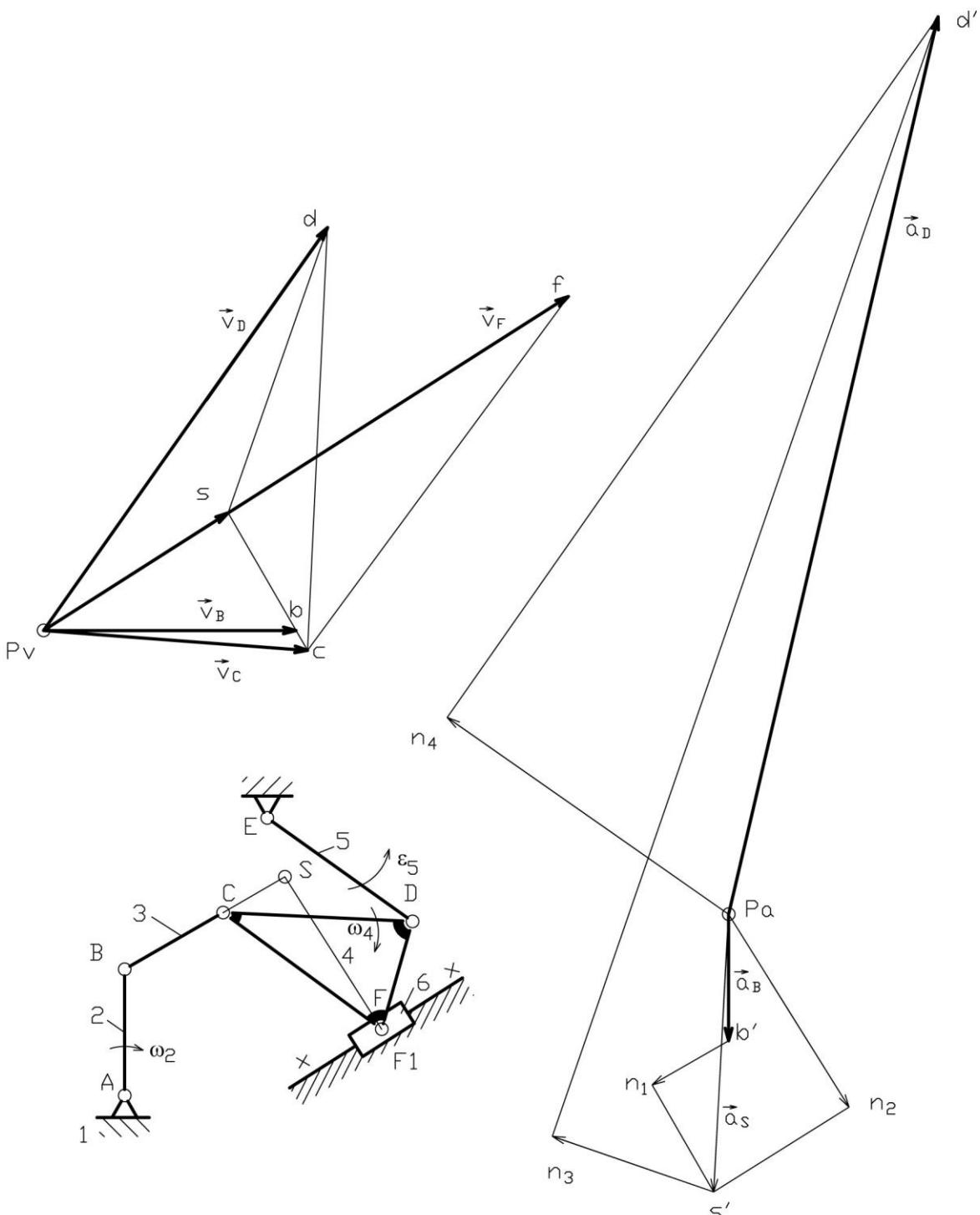
$$5. \vec{a}_D = \vec{a}_E + \vec{a}_{Dn} + \vec{a}_{Dt}, \vec{a}_{Dn} \parallel ED, \vec{a}_{Dt} \perp ED, a_{Dn}^E = \frac{(v_D^E)^2}{DE} = \frac{\left(3,9 \frac{m}{s}\right)^2}{0,28 m} = 54,32 \frac{m}{s^2}.$$

Intenziteti ubrzanja

$$a_D = \overline{P_a d'} \cdot U_a = 14,6 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m^2}{s}}{1 \text{ cm}} = 146 \frac{m^2}{s},$$

$$a_{Dt}^E = \overline{n_3 d'} \cdot U_a = 13,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{m^2}{s}}{1 \text{ cm}} = 135 \frac{m^2}{s}.$$

Ugaono ubrzanje je  $\varepsilon_5 = \frac{a_{Dt}^E}{DE} = \frac{135 \frac{m}{s^2}}{0,28 m} = 482,14 s^{-2}$ , a smer je u suprotnom smeru od obrtanja kazaljke na satu.

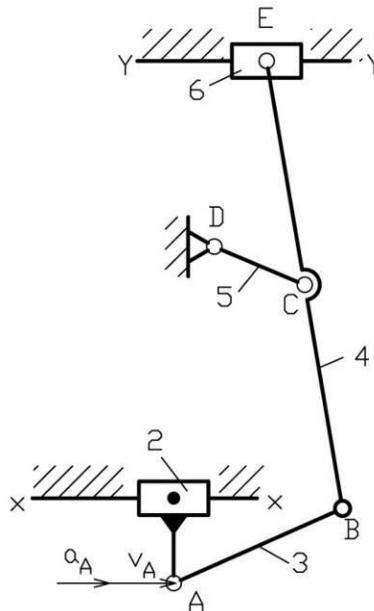


### Zadatak 4.2

Za mehanizam poznati su sledeći parametri brzina člana 2,  $v_A = 1,5 \frac{m}{s}$ ,  $a_A = 1 \frac{m}{s^2}$ , a geometrijske vrednosti zadate su razmerom  $U_L = \frac{0,1 m}{0,5 cm}$ .

Odrediti brzinu i ubrzanje tačke E, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 4. Preporučene

$$\text{razmere su: } U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} \text{ i } U_a = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}.$$



### Rešenje zadatka

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 2,44 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,49 \text{ m}$$

$$\overline{BS} = 3,48 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,7 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 3 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,6 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 0,13 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,26 \text{ m}$$

$$\overline{CE} = 3 \text{ cm} \cdot \frac{0,1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}} = 0,6 \text{ m}$$

$$\overline{CS} = 4 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,8 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. \vec{v}_S = \vec{v}_B + \vec{v}_B^B, \quad \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A,$$

$$\vec{v}_S = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A + \vec{v}_S^B, \quad \vec{v}_S \perp SB, \quad \vec{v}_B \perp BA,$$

$$2. \vec{v}_S = \vec{v}_C + \vec{v}_S^C, \quad \vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_C^D,$$

$$\vec{v}_S = \vec{v}_D + \vec{v}_C^D + \vec{v}_S^C, \quad \vec{v}_S^C \perp SC, \quad \vec{v}_C^D \perp CD,$$

$$3. \vec{v}_E = \vec{v}_S + \vec{v}_E^S, \quad \vec{v}_E \perp SD,$$

$$4. \vec{v}_E \parallel y - y,$$

$$5. \vec{v}_C = \vec{v}_E + \vec{v}_C^E, v_C \perp CE,$$

$$6. \vec{v}_C = \vec{v}_D + \vec{v}_C^D, v_C \perp CD,$$

$$7. \vec{v}_B = \vec{v}_C + \vec{v}_B^C, v_B \perp BC,$$

$$8. \vec{v}_B = \vec{v}_A + \vec{v}_B^A, v_B \perp AB.$$

Intenziteti brzine tačaka

$$v_E = \overline{P_v} e \cdot U_v = 2,28 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,14 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_B = \overline{P_v} b \cdot U_v = 2,76 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,38 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$\omega_4 = \frac{V_E}{EB} = \frac{2,49 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1,2 \text{ m}} = 2,07 \text{ s}^{-1}, \text{ sa smerom suprotnim od kretanja kazaljke na satu.}$$

Jednačine za ubrzanja

$$1. \vec{a}_S = \vec{a}_A + \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Sn} + \vec{a}_{Bt} + \vec{a}_{St}, a_{Bn}, a_{Sn} // BS, a_{Bt}, a_{St} \perp BS,$$

$$a_{Bn}^A = \frac{(v_B^A)^2}{AB} = \frac{\left(0,456 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,49 \text{ m}} = 0,424 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_{Sn}^B = \frac{(v_S^B)^2}{SB} = \frac{\left(1,44 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,7 \text{ m}} = 2,987 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$2. \vec{a}_S = \vec{a}_D + \vec{a}_{Ch} + \vec{a}_{Sn} + \vec{a}_{Ct} + \vec{a}_{St}, a_{Ch}, a_{Sn} // DS, a_{Ct}, a_{St} \perp DS,$$

$$a_{Cn}^D = \frac{(v_C^D)^2}{CD} = \frac{\left(0,21 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,26 \text{ m}} = 0,17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_{Sn}^C = \frac{(v_S^C)^2}{SC} = \frac{\left(1,66 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,8 \text{ m}} = 3,44 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$3. \vec{a}_E = \vec{a}_S + \vec{a}_{En} + \vec{a}_{Et}, a_{En} // ES, a_{Et} \perp ES,$$

$$a_{En}^S = \frac{(v_E^S)^2}{ES} = \frac{\left(2,55 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1,23 \text{ m}} = 5,3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$4. \vec{a}_E // y - y,$$

$$5. \vec{a}_B = \vec{a}_E + \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt}, a_{Bn} // BE, a_{Bt} \perp BE,$$

$$a_{Bn}^E = \frac{(v_B^E)^2}{BE} = \frac{\left(2,49 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1,2 \text{ m}} = 5,17 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$6. \vec{a}_B = \vec{a}_A + \vec{a}_{Bn} + \vec{a}_{Bt}, a_{Bn} // AB, a_{Bt} \perp AB,$$

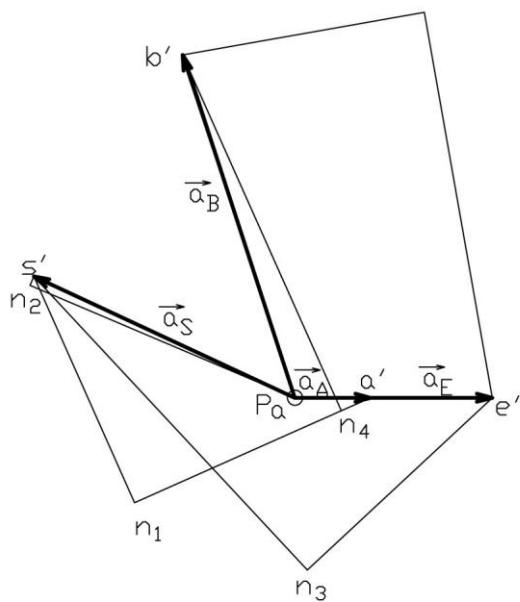
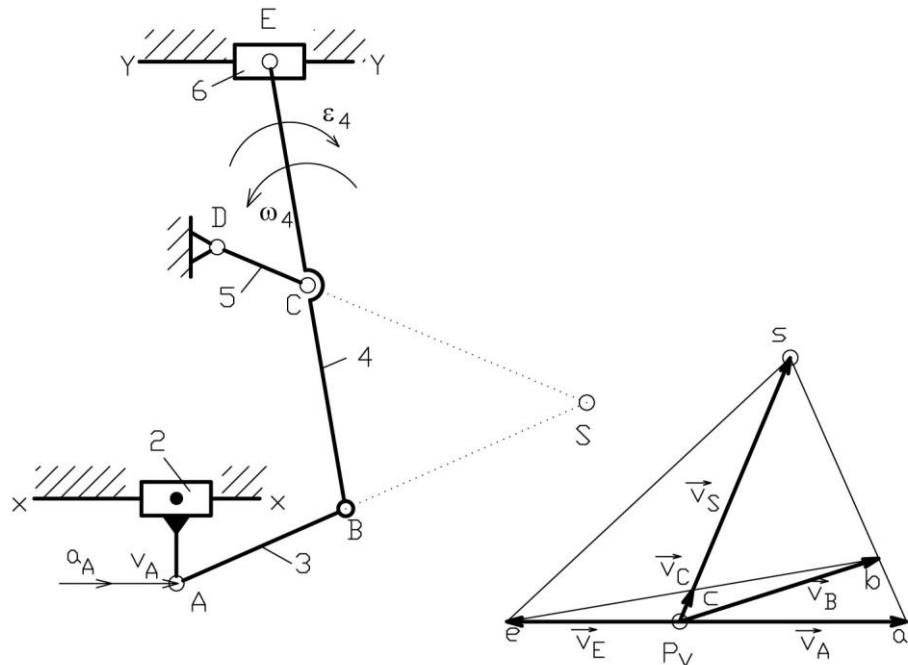
$$a_{Bn}^A = \frac{(v_B^A)^2}{BA} = \frac{\left(0,456 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,488 \text{ m}} = 0,426 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Određivanje ubrzanja

$$a_{Bt}^E = \overline{e'b'} \cdot U_a = 3,54 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}} = 3,54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

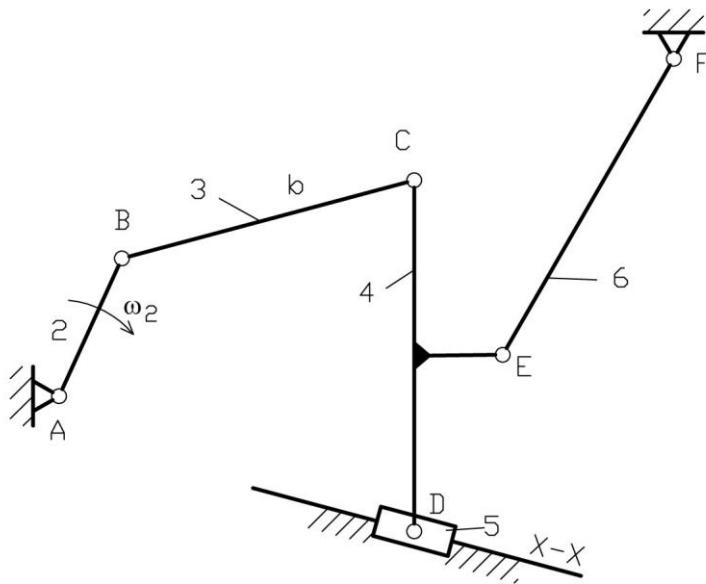
Određivanje ugaonog ubrzanja člana 4

$\varepsilon_4 = \frac{a_{Bt}^E}{EB} = \frac{3,54 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1,2 \text{ m}} = 2,95 \text{ s}^{-2}$ , smer je određen na osnovu smera vektora ubrzanja  $\vec{a}_{Bt}^E$ , tj. u smeru kretanja kazaljke na satu.



**Zadatak 4.3.**

Za mehanizam je poznato: ugaona brzina člana 2,  $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$ , ugaono ubrzanje člana 2,  $\varepsilon_2 = 0 \text{ s}^{-2}$ , a geometrijske vrednosti zadate su razmerom  $U_L = \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ cm}}$ . Odrediti brzinu i ubrzanje tačke E, ugaonu brzinu i ugaono ubrzanje člana 6. Preporučene razmere su:  $U_v = \frac{1 \text{ m}}{4 \text{ cm}}$  i  $U_a = \frac{20 \text{ m}}{5 \text{ cm}}$ .

**Rešenje zadatka**

Geometrijski parametri mehanizma

$$\overline{AB} = 2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,2 \text{ m}$$

$$\overline{BC} = 4 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,4 \text{ m}$$

$$\overline{CD} = 4,64 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,464 \text{ m}$$

$$\overline{CE} = 2,6 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,26 \text{ m}$$

$$\overline{DE} = 2,6 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,26 \text{ m}$$

$$\overline{EF} = 4,5 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,45 \text{ m}$$

$$\overline{CS} = 1,4 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,14 \text{ m}$$

$$\overline{DS} = 5,2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,52 \text{ m}$$

$$\overline{ES} = 2,7 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} = 0,27 \text{ m}$$

Jednačine za brzine

$$1. v_B = AB \cdot \omega_2 = 0,20 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}, \vec{v}_B \perp BA,$$

$$\vec{v}_S = \vec{v}_C + \vec{v}_B \Rightarrow \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_S,$$

$$2. \vec{v}_S = \vec{v}_B + \vec{v}_C + \vec{v}_S, v_C, v_S \perp SC,$$

$$\vec{v}_S = \vec{v}_D + \vec{v}_S \Rightarrow \vec{v}_D = \vec{v}_{D1} + \vec{v}_D,$$

$$3. \vec{v}_S = \vec{v}_{D1} + \vec{v}_D + \vec{v}_S, v_D, v_S \perp SD,$$

$$4. \vec{v}_E = \vec{v}_S + \vec{v}_E, v_E \perp SD,$$

$$5. \vec{v}_E = \vec{v}_F + \vec{v}_E, v_E \perp EF,$$

$$6. \vec{v}_C = \vec{v}_B + \vec{v}_C, v_C \perp CB,$$

$$7. \vec{v}_C = \vec{v}_E + \vec{v}_C, v_C \perp CE,$$

$$8. \vec{v}_D = \vec{v}_C + \vec{v}_D, v_D \perp DC,$$

$$9. \vec{v}_D // x - x.$$

Intenzitet brzine

$$\text{Razmera za plan brzina je } U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ cm}}, \text{ iz kojeg su određuju intenziteti brzine tačke E}$$

$$v_E = \overline{P_v e} \cdot U_v = 3,35 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{4 \text{ cm}} = 0,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Ugaone brzine

$$\text{Intenzitet ugaone brzine je } \omega_6 = \frac{v_E}{EF} = \frac{0,84 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,45 \text{ m}} = 1,87 \text{ s}^{-1}, \text{ a smer odgovara smeru vektora}$$

brzne tačke E.

Plan ubrzanja

$$\text{Plan ubrzanja se dobija na osnovu jednačina za ubrzanja koristeći razmeru } U_a = \frac{20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{5 \text{ cm}}:$$

$$1. a_B = \overline{AB} \cdot \omega_2^2 = 20 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, \text{ gde je: } \vec{a}_B // AB \text{ u smeru ka tački A,}$$

$$2. \vec{a}_S = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Sn} + \vec{a}_{St} + \vec{a}_{Ct}, \vec{a}_{Sn}, \vec{a}_{Cn} // SC, \vec{a}_{Ct}, \vec{a}_{St} \perp SC,$$

$$a_{Sn}^C = \frac{(v_S)^2}{SC} = \frac{\left(0,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,14 \text{ m}} = 1,78 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}, a_{Cn}^B = \frac{(v_C)^2}{CB} = \frac{\left(0,88 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{0,4 \text{ m}} = 1,94 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$3. \vec{a}_S = \vec{a}_{D1} + \vec{a}_D + \vec{a}_{Sn} + \vec{a}_{St}, \vec{a}_D, \vec{a}_{Sn} // SD, \vec{a}_{St} \perp SD,$$

$$a_{Sn}^D = \frac{(v_S^D)^2}{SD} = \frac{\left(1,86 \frac{m}{s}\right)^2}{0,52 m} = 6,65 \frac{m}{s^2},$$

4.  $\vec{a}_E = \vec{a}_S + \vec{a}_{En} + \vec{a}_{Et}$ ,  $\vec{a}_{En} // ES$ ,  $\vec{a}_{Et} \perp ES$ ,

$$a_{En}^S = \frac{(v_E^S)^2}{ES} = \frac{\left(1 \frac{m}{s}\right)^2}{0,27 m} = 3,7 \frac{m}{s^2},$$

5.  $\vec{a}_E = \vec{a}_F + \vec{a}_{En} + \vec{a}_{Et}$ ,  $\vec{a}_{En} // EF$ ,  $\vec{a}_{Et} \perp EF$ ,

$$a_{En}^F = \frac{(v_E^F)^2}{EF} = \frac{\left(0,835 \frac{m}{s}\right)^2}{0,45 m} = 1,55 \frac{m}{s^2},$$

6.  $\vec{a}_C = \vec{a}_B + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}$ ,  $\vec{a}_{Cn} // CB$ ,  $\vec{a}_{Ct} \perp CB$ ,  $a_{Cn}^B = 1,936 \frac{m}{s^2}$ ,

7.  $\vec{a}_C = \vec{a}_E + \vec{a}_{Cn} + \vec{a}_{Ct}$ ,  $\vec{a}_{Cn} // CE$ ,  $\vec{a}_{Ct} \perp CE$ ,  $a_{Cn}^E = \frac{(v_C^E)^2}{CE} = \frac{\left(0,97 \frac{m}{s}\right)^2}{0,26 m} = 3,62 \frac{m}{s^2}$ ,

8.  $\vec{a}_D = \vec{a}_C + \vec{a}_{Dn} + \vec{a}_{Dt}$ ,  $\vec{a}_{Dn} // DC$ ,  $\vec{a}_{Dt} \perp DC$ ,  $a_{Dn}^C = \frac{(v_D^C)^2}{DC} = \frac{\left(1,67 \frac{m}{s}\right)^2}{0,64 m} = 4,36 \frac{m}{s^2}$ ,

9.  $\vec{a}_D // x - x$ .

### Intenziteti ubrzanja

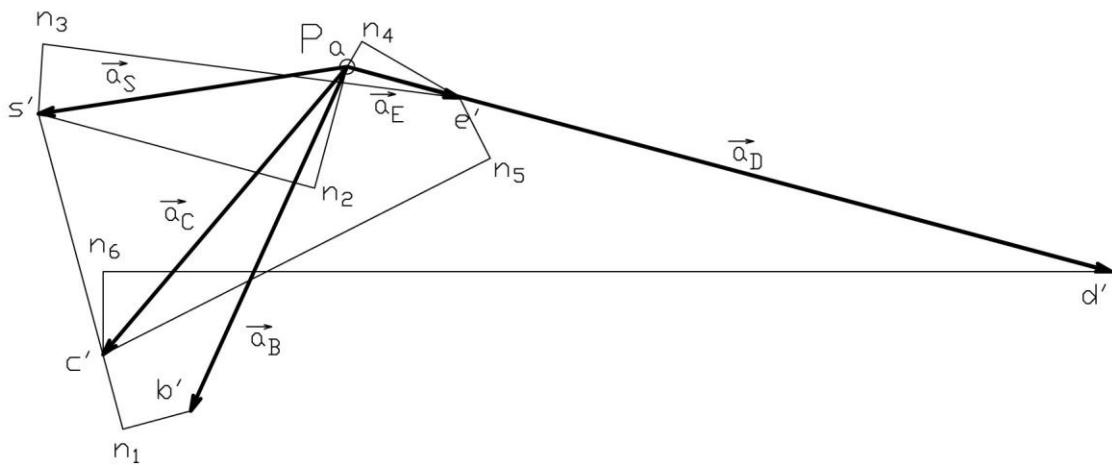
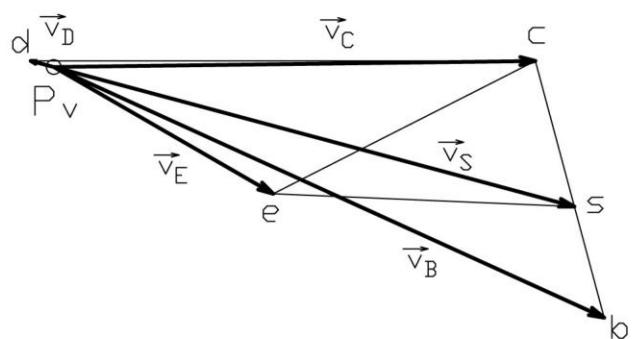
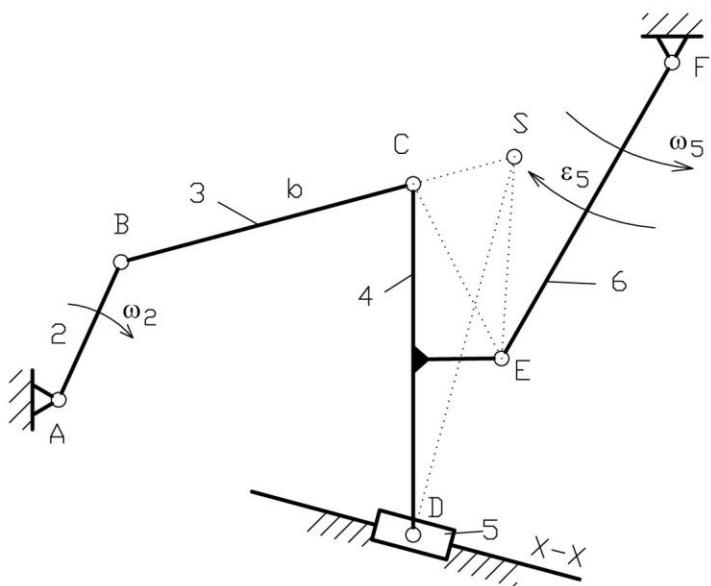
Razmera za plan ubrzanja je  $U_a = \frac{20 \frac{m}{s^2}}{5 \text{ cm}}$ , iz kojeg su određuju intenziteti ubrzanja:

$$a_E = \overline{P_a e} \cdot U_a = 1,54 \text{ cm} \cdot \frac{20 \frac{m}{s^2}}{5 \text{ cm}} = 6,16 \frac{m}{s^2},$$

$$a_{Et}^F = \overline{e' n_4} \cdot U_a = 1,5 \text{ cm} \cdot \frac{20 \frac{m}{s^2}}{5 \text{ cm}} = 6 \frac{m}{s^2}.$$

### Ugaono ubrzanje

Ugaono ubrzanje člana 5 je  $\varepsilon_5 = \frac{a_{Et}^F}{EF} = \frac{6 \frac{m}{s^2}}{0,45} = 13,3 \text{ s}^{-2}$ , a smer je određen na osnovu vektora tangencijalnog ubrzanja  $a_{Et}^F$ .

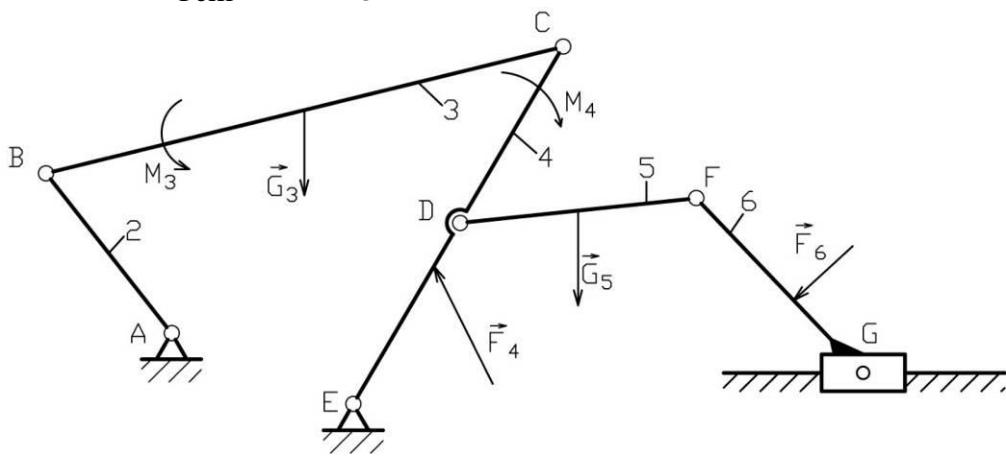


## 5. Određivanje pogonske snage

### Meoda kinetostatičkih pritisaka

#### Zadatak 5.1.

Odrediti kinetostatičke pritiske u kinematičkim vezama i snagu za pogon mehanizma ako je zadato:  $\omega_2 = 20 \text{ s}^{-1}$ ,  $G_3 = 50 \text{ N}$ ,  $G_5 = 70 \text{ N}$ ,  $F_4 = 50 \text{ N}$ ,  $F_6 = 100 \text{ N}$ ,  $M_3 = 46 \text{ Nm}$ ,  $M_4 = 56 \text{ Nm}$ ,  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$  i  $U_F = \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}}$ . Inercijalne sile zanemariti.



#### Rešenje zadatka

Da bi se odredili kinetostatički pritisci i pogonska sila, mehanizam se rastavlja na kinematičke parove ili članove počevši od najudaljenijeg u odnosu na pogonski 2, u ovom slučaju para 5,6.

U cilju dobijanja što tačnijeg rešenja, moraju se predvideti i naneti sve sile (radne, težine, inercijalne, otpor sredine, trenje i pogonska sila) koje deluju na mehanizam. U određenim okolnostima radi pojednostavljenja postupka određivanja podgonske snage, neki od parametara se mogu zanemariti. Dejstvo vodice 1 na klizač 6 zameni se sa reakcijom  $F_{1,6}$  na pretpostavljenom rastojanju u odnosu na tačku G. Uticaj člana 4 na 5 predstavi se dve komponente normalnom i tangencijalnom ( $F_{4,5n}$  i  $F_{4,5t}$ ). Smerovi sila su nepoznati te se pretpostavljaju. Za dobijanje nepoznatih reakcija i rastojanja u kinematičkim vezama koriste se statički uslovi ravnoteže.

U prvom koraku na osnovu uslova ravnoteže da je  $\sum M_{F5} = 0$  dobija se sila  $F_{4,5}^T$ .

Zbir momenata sila za član 5 za tačku F je

$$\sum M_{F5} = 0$$

$$F_{4,5}^T \cdot \overline{DF} - G_5 \cdot h_5 = 0 \text{ odakle je}$$

$$F_{4,5}^T = \frac{G_5 \cdot h_5}{\overline{DF}} = \frac{70 \text{ N} \cdot 0,157 \text{ m}}{0,31 \text{ m}} = 35,45 \text{ N}$$

Da bi sistem bio u ravnoteži, suma projekcija svih sila na koordinatne ose mora biti jednaka nuli. U rešavanju ovih zadataka, koristiće se vektorski zbir svih sila koji takođe mora biti

jednak nuli, odnosno, poligon sila mora biti zatvoren. Na osnovu uslova ravnoteže da je zbir svih sila za kinematički par 5 i 6 jednak nuli dobijaju se sile  $\vec{F}_{1,6}$  i  $\vec{F}_{4,5}^n$ .

---

Ravnoteža sila

$$\sum \vec{F}_{i5,6} = 0$$

$$\vec{F}_{4,5}^n + \vec{F}_{4,5}^t + \vec{G}_5 + \vec{F}_6 + \vec{F}_{1,6} = \vec{0}$$

Na poligonom se prvo nacrtaju u razmeri vektori poznatih sila. U ovom slučaju su nam nepoznate sile  $\vec{F}_{1,6}$  i  $\vec{F}_{4,5}^n$ , ali pošto nam je poznat pravac, poligon se može zatvoriti tako što se na početku nanese pravac jedne sile, odnosno na kraj poligona pravac druge nepoznate sile.

---

Iz poligona sila se dobijaju sledeće vrednosti

$$F_{1,6} = \overline{15} \cdot U_F = 4,22 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 84,4 \text{ N},$$

$$F_{4,5}^n = \overline{45} \cdot U_F = 4,17 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 83,4 \text{ N},$$

$$F_{4,5} = \overline{35} \cdot U_F = 4,53 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 90,6 \text{ N}.$$


---

Moment sila člana 6 za tačku F

$$\sum M_{(F6)} = 0$$

$$F_6 \cdot h_6 - F_{1,6} \cdot h_{1,6} = 0$$

$$h_{1,6} = \frac{F_6 \cdot h_6}{F_{1,6}} = \frac{100 \text{ N} \cdot 0,187 \text{ m}}{84,4 \text{ N}} = 0,22 \text{ m}, F_{5,6} = \overline{25} \cdot U_F = 3,7 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 74 \text{ N}$$


---

U narednom koraku se analizira kinematički par 3 i 4. Uticaj parova 5, 1 i 2, zameni se reakcijama  $\vec{F}_{2,3}^n$ ,  $\vec{F}_{2,3}^t$ ,  $\vec{F}_{1,4}^n$ ,  $\vec{F}_{1,4}^t$ ,  $\vec{F}_{5,4} = -\vec{F}_{4,5}$

---

Zbir momenata sila za član 3 za tačku C je

$$\sum M_{C3} = 0$$

$$F_{2,3}^t \cdot \overline{BC} - G_3 \cdot h_3 - M_3 = 0 \text{ odakle je}$$

$$F_{2,3}^t = \frac{G_3 \cdot h_3 + M_3}{\overline{BC}} = \frac{50 \text{ N} \cdot 0,34 \text{ m} + 46 \text{ Nm}}{0,706 \text{ m}} = 89,23 \text{ N}$$


---

Zbir momenata sila za član 4 za tačku C je

$$\sum M_{C4} = 0$$

$$F_{5,4} \cdot h_{5,4} + F_4 \cdot h_4 + M_4 + F_{1,4}^T \cdot \overline{EC} = 0$$

$$F_{1,4}^t = \frac{- (F_{5,4} \cdot h_{5,4} + F_4 \cdot h_4 + M_4)}{\overline{EC}} =$$

$$= - \frac{90,6 \text{ N} \cdot 0,193 \text{ m} + 50 \text{ N} \cdot 0,28 \text{ m} + 56 \text{ Nm}}{0,547 \text{ m}} = -159,93 \text{ N}$$


---

Na osnovu uslova ravnoteže da je zbir svih sila za par 3 i 4 jednak nuli, nacrtata se zatvoren poligon sila iz kojeg se dobijaju nepoznate sile  $\vec{F}_{2,3}^n$ ,  $\vec{F}_{2,3}^t$ ,  $\vec{F}_{1,4}^n$ ,  $\vec{F}_{1,4}^t$ ,  $\vec{F}_{3,4}$

$$\sum \vec{F}_{i3,4} = 0$$


---

$$\vec{F}_{2,3} + \vec{F}_{2,3}^t + \vec{G}_3 + \vec{F}_4 + \vec{F}_{5,4} + \vec{F}_{1,4}^n + \vec{F}_{1,4}^t = 0$$

Iz poligona sila se dobijaju sledeće vrednosti

$$F_{2,3} = \overline{64} \cdot U_F = 4,7 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 94 \text{ N},$$

$$F_{1,4}^n = \overline{67} \cdot U_F = 1,49 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 29,8 \text{ N},$$

$$F_{2,3}^n = \overline{56} \cdot U_F = 1,46 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 29,2 \text{ N},$$

$$F_{3,4} = \overline{36} \cdot U_F = 2,9 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 58 \text{ N},$$

$$F_{1,4} = \overline{16} \cdot U_F = 8,13 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}} = 162,6 \text{ N}.$$

Na kraju se analiziraju sile na pogonskom članu 2. Iz uslova ravnoteže za član 2 dobija se pogonska sila  $F_p$ , pogonski moment i pogonska snaga. Momentna jednačina za tačku A na članu 2 iz koje se dobija pogonska sila  $F_p$ .

$$\sum M_A = 0$$

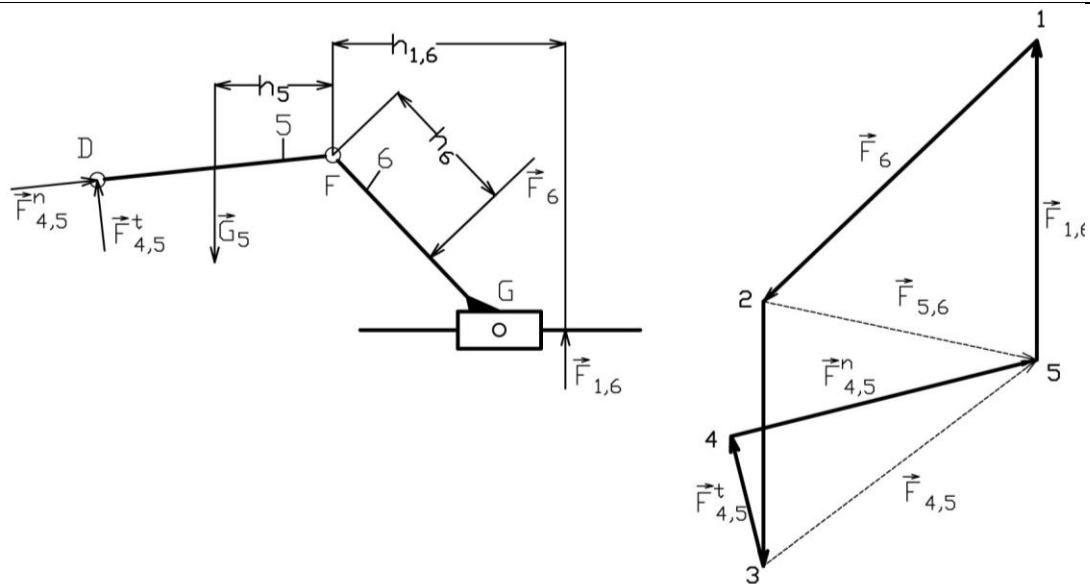
$$F_{2,3} \cdot h_{2,3} - M_p = 0$$

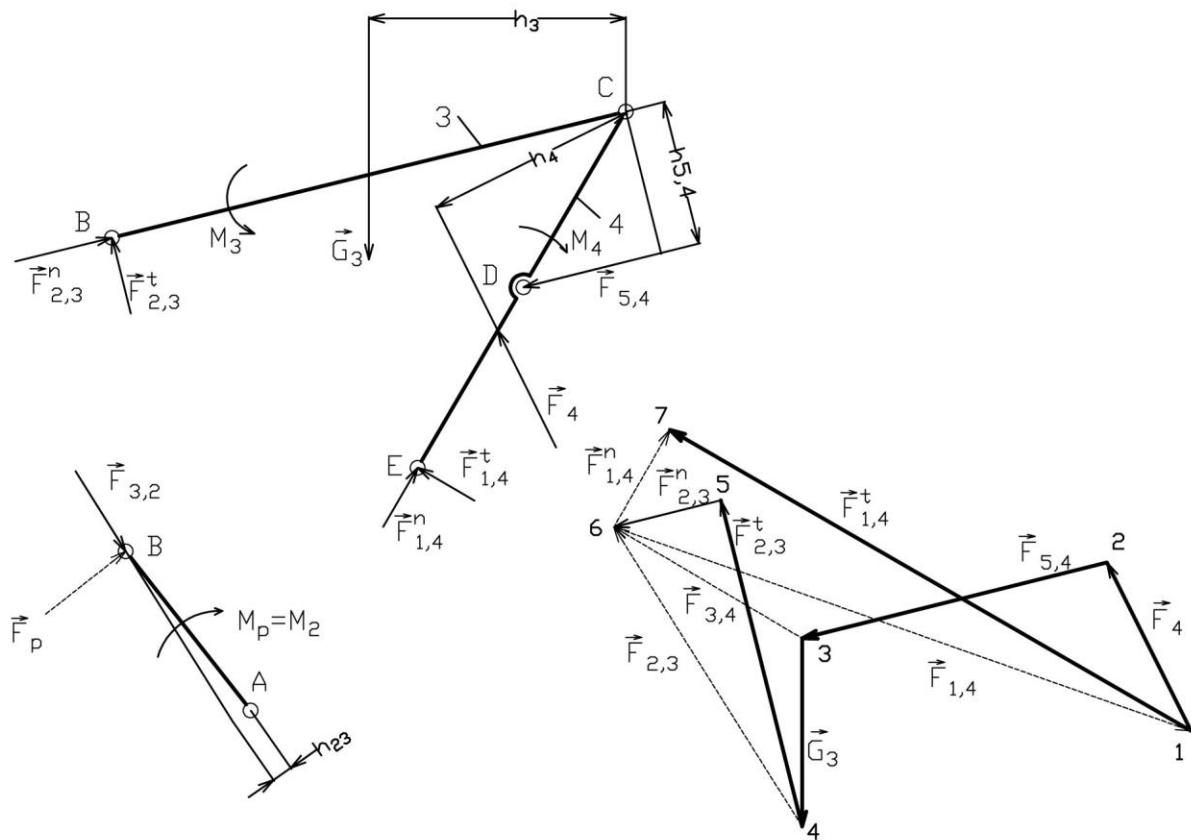
$$M_p = F_{2,3} \cdot h_{2,3}$$

$$F_p = \frac{M_p}{AB} = \frac{2,63 \text{ Nm}}{0,268 \text{ m}} = 9,8 \text{ N}$$

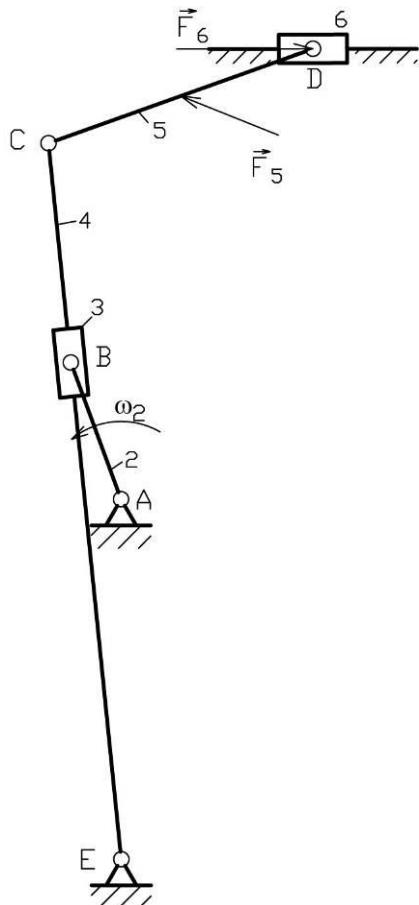
$$P_p = M_2 \cdot \omega_2 = 2,63 \text{ Nm} \cdot 20 \text{ s}^{-1} = 52,6 \text{ W}$$

$$M_2 = F_{2,3} \cdot h_{2,3} = 94 \text{ N} \cdot 0,028 \text{ m} = 2,63 \text{ Nm}$$



**Zadatak 5.2.**

Odrediti kinetostatičke pritiske u kinematičkim vezama i snagu za pogon mehanizma ako je zadato:  $F_6 = 100 \text{ N}$ ,  $F_5 = 50 \text{ N}$ ,  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}$  i  $U_F = \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}}$ . Inercijalne sile zanemariti.



### Rešenje zadatka

Mehanizam se prvo rastavi na kinematičke parove i članove (zavisno od broja nepoznatih). Nakon toga se sklapa poligon sila na osnovu kojeg se dobijaju maksimalno dve nepoznate sile sa poznatim pravcima.

Momentna jednačina za član 5

$$\sum M_D = 0$$

$$F_{4,5}^t \cdot \overline{CD} + F_5 \cdot h_5 = 0$$

$$F_{4,5}^t = -\frac{F_5 \cdot h_5}{\overline{CD}} = -\frac{50 \text{ N} \cdot 0,12 \text{ m}}{0,37 \text{ m}} = -16,2 \text{ N}$$

Ravnoteža sila

$$\sum \vec{F}_{i5,6} = 0$$

$$\vec{F}_{4,5}^n + \vec{F}_{4,5}^t + \vec{F}_5 + \vec{F}_6 + \vec{F}_{1,6} = 0$$

Iz plana sila se izračunavaju sledeće vrednosti na osnovu usvojene razmere  $U_F = \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}}$

$$F_{1,6} = \overline{51} \cdot U_F = 1,59 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 15,9 \text{ N},$$

$$F_{4,5}^n = \overline{45} \cdot U_F = 6,2 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 62 \text{ N},$$

$$F_{4,5}^t = \overline{35} \cdot U_F = 6,37 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{10 \text{ cm}} = 63,7 \text{ N}.$$

Momentna jednačina za član 4

$$\sum M_E = 0$$

$$-F_{3,4} \cdot \overline{EB} + F_{5,4} \cdot h_{5,4} = 0$$

$$F_{3,4} = \frac{F_{5,4} \cdot h_{5,4}}{\overline{EB}} = \frac{63,7 \text{ N} \cdot 0,85 \text{ m}}{0,66 \text{ m}} = 82 \text{ N}$$

Ravnoteža sila za član 4

$$\sum \bar{F}_{i4} = 0$$

$$\vec{F}_{3,4} + \vec{F}_{5,4} + \vec{F}_{1,4}^n + \vec{F}_{1,4}^t = 0$$

Iz plana se dobijaju sledeće vrednosti

$$F_{1,4}^n = \overline{13} \cdot U_F = 2,89 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 28,9 \text{ N},$$

$$F_{1,4}^t = \overline{14} \cdot U_F = 2,52 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 25,2 \text{ N},$$

$$F_{1,4} = \overline{23} \cdot U_F = 3,84 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ N}}{1 \text{ cm}} = 38,4 \text{ N.}$$

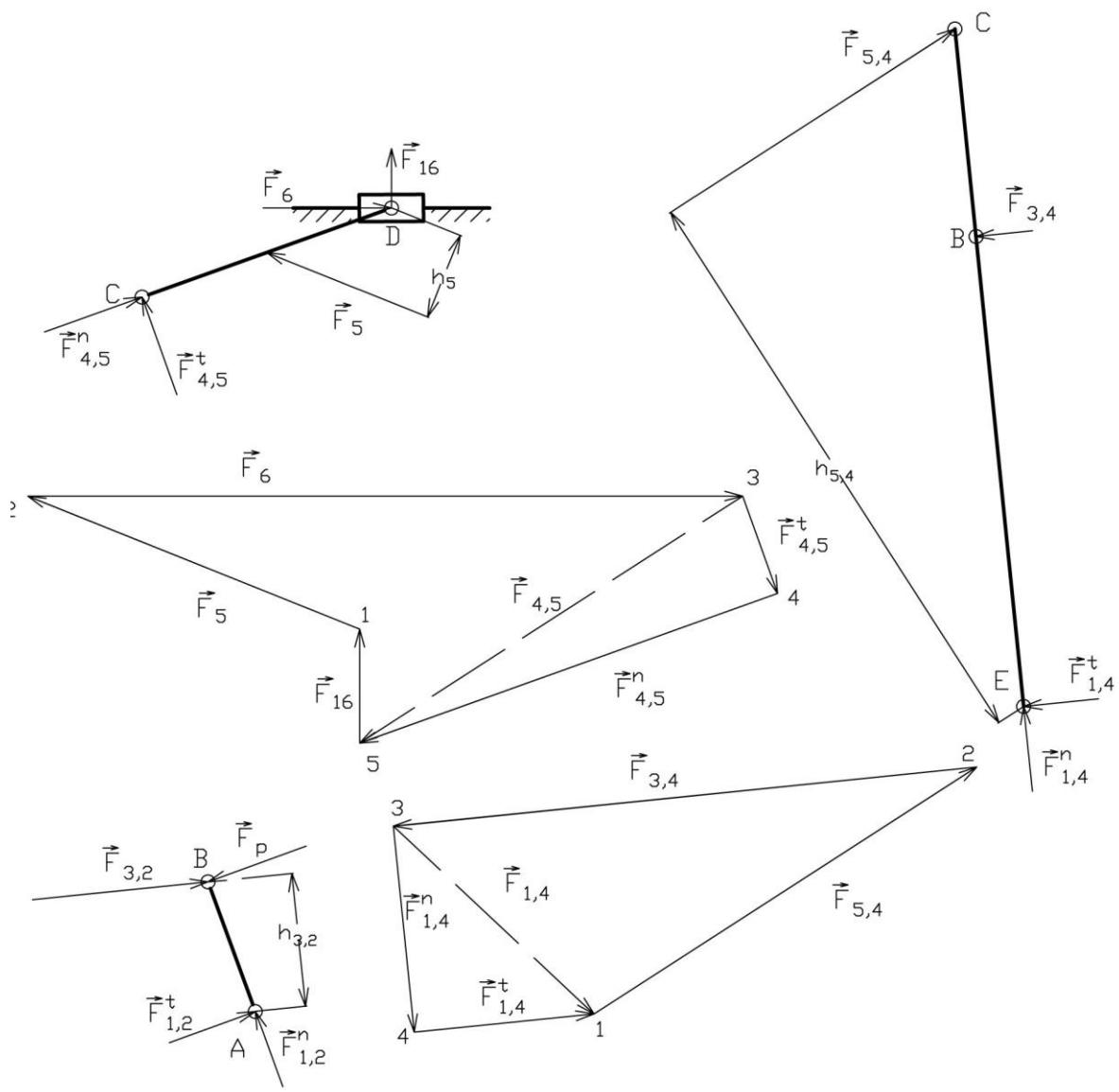
Momentna jednačina za član 2

$$\sum M_A = 0$$

$$F_{3,2} \cdot h_{3,2} - F_p \cdot \overline{AB} = 0$$

Pogonska sila

$$F_p = \frac{F_{3,2} \cdot h_{3,2}}{\overline{AB}} = \frac{82 \text{ N} \cdot 0,186 \text{ m}}{0,19 \text{ m}} = 80,27 \text{ N}$$



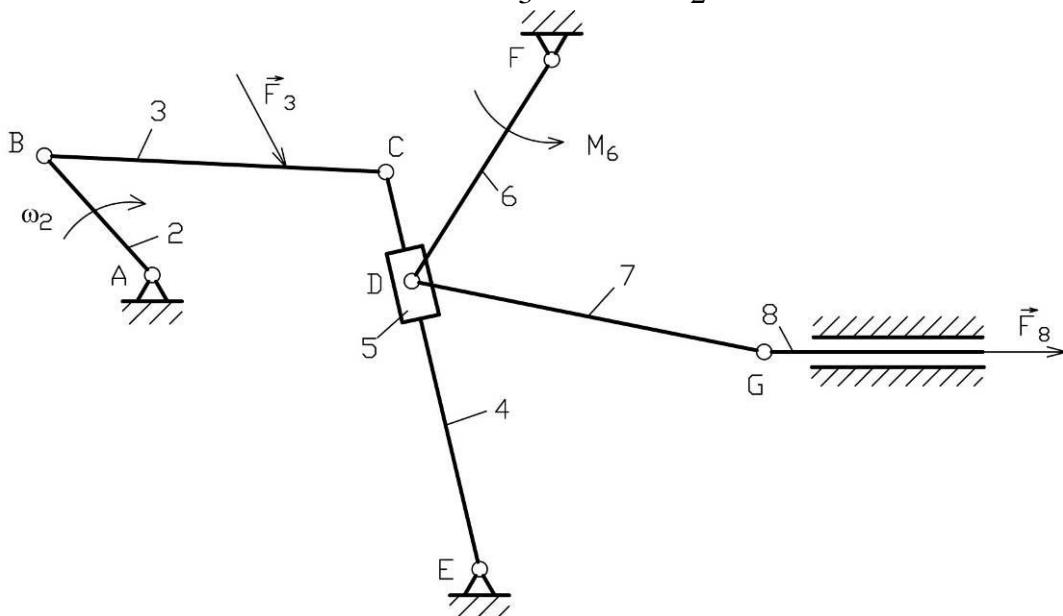
### Metod redukovanih mehanizma

#### Zadatak 5.3.

Odrediti snagu za pogon mehanizma metodom redukcije ako je zadato:  $U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1,5 \text{ cm}}$ ,

$$U_v = \frac{1 \text{ m/s}}{1 \text{ cm}}, \quad U_a = \frac{10 \text{ m/s}^2}{2 \text{ mm}}, \quad \omega_2 = 40 \text{ s}^{-1}, \quad \varepsilon_2 = 0 \text{ s}^{-2}, \quad F_3 = 40 \text{ N}, \quad F_8 = 90 \text{ N}, \quad M_6 = 8 \text{ Nm},$$

$$m_3 = 0,8 \text{ kg}, \quad m_6 = 0,9 \text{ kg}, \quad m_8 = 0,6 \text{ kg}, \quad \rho_3 = \frac{2}{3} BS_3 \text{ i } \rho_6 = \frac{1}{2} FS_6.$$



#### Rešenje zadatka

Prvo treba odrediti inercijalne sile članova mehanizma sa datim masama kao i njihove napadne tačke. Pre toga, potrebno je odrediti ubrzanja središta članova mehanizma. Potom se nacrtava redukovani mehanizam (plan brzina zarotiran za  $90^\circ$  suprotno od smera rotacije pogonskog člana). Na redukovanim mehanizmu nanesu se sve sile koje deluju na izvorni mehanizam.

Na osnovu vrednosti poluprečnika inercije određuju se položaji tačke K na članovima u odnosu na tačke za koje su definisani poluprečnici inercije.

Položaj Hajgensovog centra oscilovanja je

$$\overline{BK}_3 = \overline{BS}_3 + \frac{\rho_3^2}{BS_3} = 22,57 \text{ mm} + \frac{(15,05 \text{ mm})^2}{22,57 \text{ mm}} = 32,6 \text{ mm}$$

$$\overline{FK}_6 = \overline{FS}_6 + \frac{\rho_6^2}{FS_6} = 17,3 \text{ mm} + \frac{(8,65 \text{ mm})^2}{17,3 \text{ mm}} = 21,6 \text{ mm}$$

Vrednosti inercijalnih sila članova su dobijene na sledeći način:

$$F_{i3} = a_{S3} \cdot m_3 = 35,6 \text{ mm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ mm}} \cdot 0,8 \text{ kg} = 142,4 \text{ N},$$

$$F_{i6} = a_{S6} \cdot m_6 = 9,5 \text{ mm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ mm}} \cdot 0,9 \text{ kg} = 42,7 \text{ N},$$

$$F_{i8} = a_G \cdot m_8 = 7 \text{ mm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \text{ mm}} \cdot 0,6 \text{ kg} = 21 \text{ N}.$$

Obrtni moment  $M_6$  se može zameniti dejstvom sile u tački D

$$F_6^F = \frac{M_6}{DF} = \frac{8 \text{ Nm}}{0,23 \text{ m}} = 34,78 \text{ N}$$

Kako bi se odredile napadne tačke na redukovanim mehanizmu, koristiće se proporcije geometrijskih rastojanja, s obzirom na međusobnu komplementarnost dvaju mehanizama.

$$\frac{\overline{BC}}{\overline{BH}} = \frac{\overline{b^0c^0}}{\overline{b^0h^0}} \Rightarrow \overline{b^0h^0} = \frac{\overline{b^0c^0} \cdot \overline{BH}}{\overline{BC}} = \frac{2,89 \text{ cm} \cdot 3,19 \text{ cm}}{4,51 \text{ cm}} = 2,04 \text{ cm}$$

$$\frac{\overline{FD}}{\overline{FK_6}} = \frac{\overline{Rd^0}}{\overline{Rk_6}} \Rightarrow \overline{Rk_6} = \frac{\overline{Rd^0} \cdot \overline{FK_6}}{\overline{FD}} = \frac{5,05 \text{ cm} \cdot 2,16 \text{ cm}}{3,46 \text{ cm}} = 3,15 \text{ cm}$$

Na osnovu statičke jednačine za ravnotežu svih momenata za određenu tačku, dobiće se nepoznata vrednost pogonske sile.

$$\sum M_R = 0$$

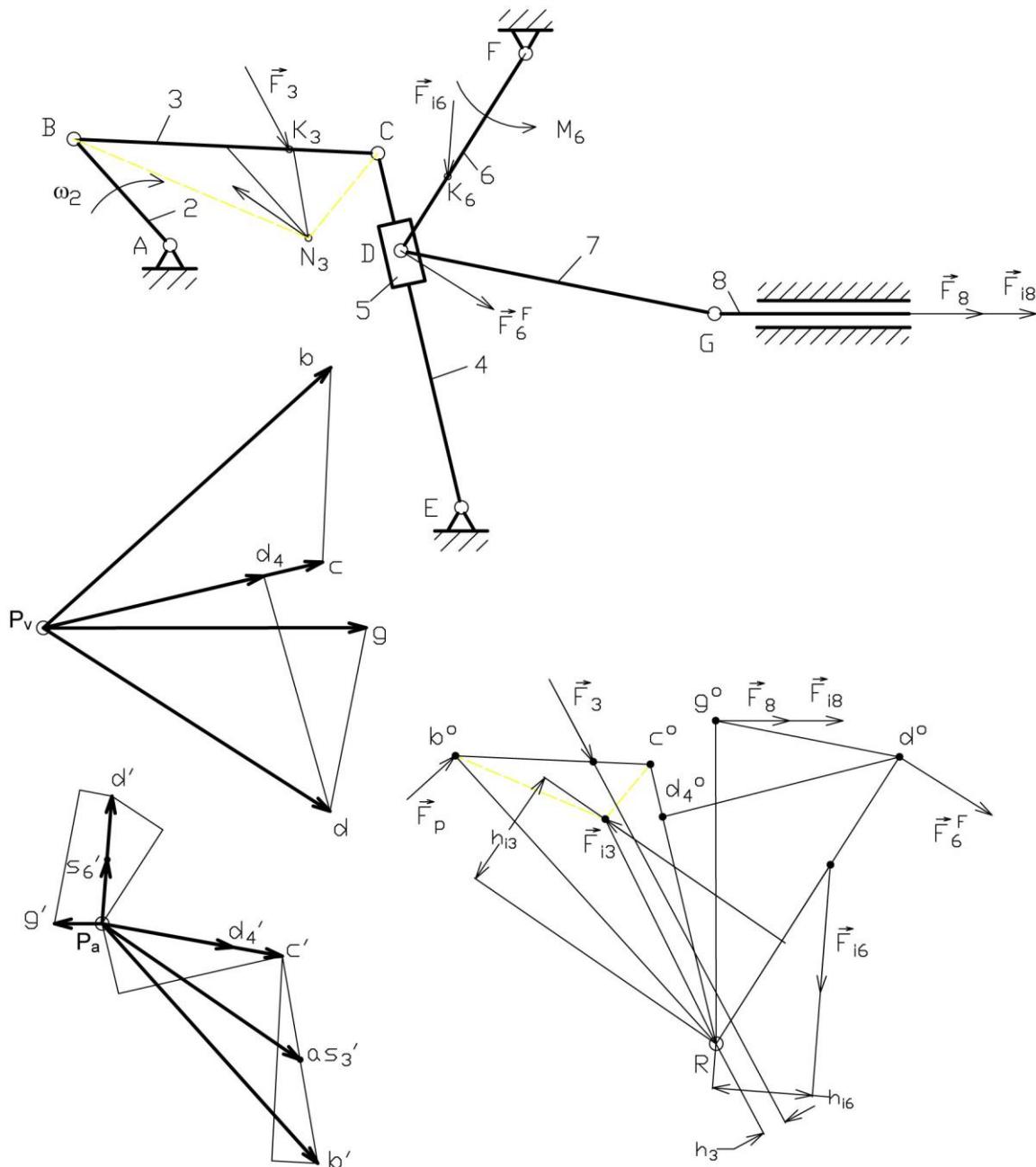
$$F_p \cdot \overline{Rb_o} + F_3 \cdot h_3 + (F_8 + F_{i8}) \cdot \overline{Rg^0} + F_6^F \cdot \overline{Rd^0} + F_{i6} \cdot h_{hi6} - F_{i3} \cdot h_{i3} = 0$$

$$F_p = \frac{-40 \text{ N} \cdot 0,35 \text{ cm} - (90 \text{ N} + 21 \text{ N}) \cdot 4,79 \text{ cm} - 34,78 \text{ N} \cdot 5,05 \text{ cm} - 42,7 \text{ N} \cdot 1,48 \text{ cm} + 142,4 \text{ N} \cdot 1,8 \text{ cm}}{5,76 \text{ cm}}$$

$$F_p = -91,7 \text{ N}$$

Pogonska snaga se dobija iz sledećeg izraza:

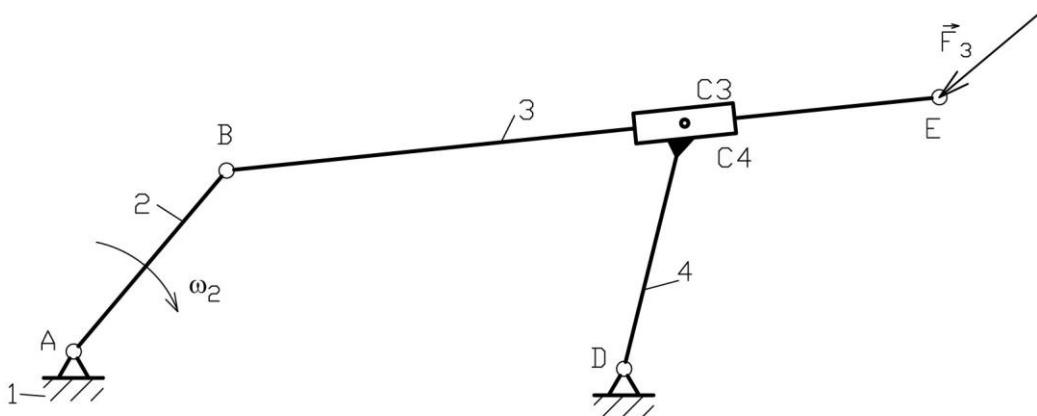
$$P_p = M_p \cdot \omega_2 = 91,7 \text{ N} \cdot 0,27 \text{ m} \cdot 40 \text{ s}^{-1} = 990,36 \text{ W}$$



#### Zadatak 5.4.

Odrediti pogonsku silu na mehanizmu metodom redukcije ako su dati sledeći podaci:  
 $\omega_2 = 10 \text{ s}^{-1}$ ,  $\varepsilon_2 = 0 \text{ s}^{-2}$ ,  $m_2 = 0,2 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 0,6 \text{ kg}$ ,  $m_4 = 0,5 \text{ kg}$ ,  $F_3 = 10 \text{ N}$ ,  $\rho_3 = 0,35 \cdot \overline{\text{BS}_3}$  i

$$\rho_4 = 0,45 \cdot \overline{\text{DS}_4}, U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}, U_a = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}}, U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}} \text{ i } U_F = \frac{10 \text{ N}}{5 \text{ mm}}.$$

**Rešenje zadatka**

Napdane tačke inercijalnih sila dobijene su iz sledećih matematičkih relacija:

$$\overline{BK}_3 = \overline{BS}_3 + \frac{\rho_3^2}{\overline{BS}_3} = 47,5 \text{ mm} + \frac{(16,6)^2}{47,5 \text{ mm}} = 53,32 \text{ mm},$$

$$\overline{DK}_4 = \overline{DS}_4 + \frac{\rho_4^2}{\overline{DS}_4} = 16,7 \text{ mm} + \frac{(7,5)^2}{16,7 \text{ mm}} = 18,39 \text{ mm}.$$

Intenziteti ubrzanja središta se dobijaju na osnovu plana ubrzanja i poznate razmere.

$$a_{S3} = \overline{P_a s_3} \cdot U_a = 2,94 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}} = 29,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2},$$

$$a_{S4} = \overline{P_a s_4} \cdot U_a = 1,65 \text{ cm} \cdot \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{1 \text{ cm}} = 16,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Vrednosti inercijalnih sila članova mehanizma dobijene su na sledeći način:

$$F_{i3} = a_{S3} \cdot m_3 = 29,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,6 \text{ kg} = 17,64 \text{ N},$$

$$F_{i4} = a_{S4} \cdot m_4 = 16,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,5 \text{ kg} = 8,25 \text{ N}.$$

Po analogiji iz prethodnog zadatka, položaji napadnih tačaka inercijalnih sila na redukovanim mehanizmu se dobijaju iz geometrijskih proporcija.

$$\frac{\overline{DC}}{\overline{DK}_4} = \frac{\overline{Rc}^o}{\overline{Rk}_4} \Rightarrow \overline{Rk}_4 = \frac{\overline{Rc}^o \cdot \overline{DK}_4}{\overline{DC}} = \frac{18,39 \text{ mm} \cdot 15,06 \text{ mm}}{33,45 \text{ mm}} = 8,28 \text{ mm}$$

Pogonska sila dobija se iz statičkog uslova ravnoteže za redukovani mehanizam

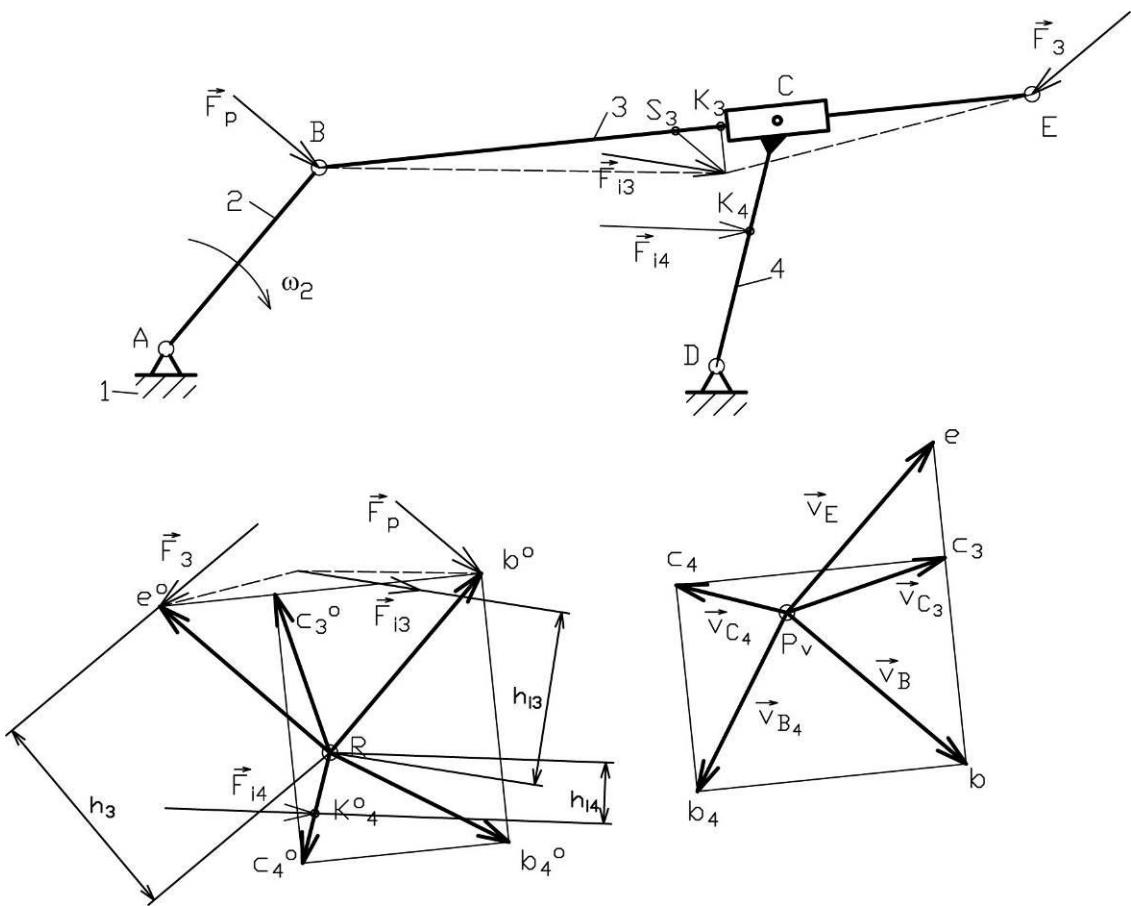
$$\sum M_R = 0$$

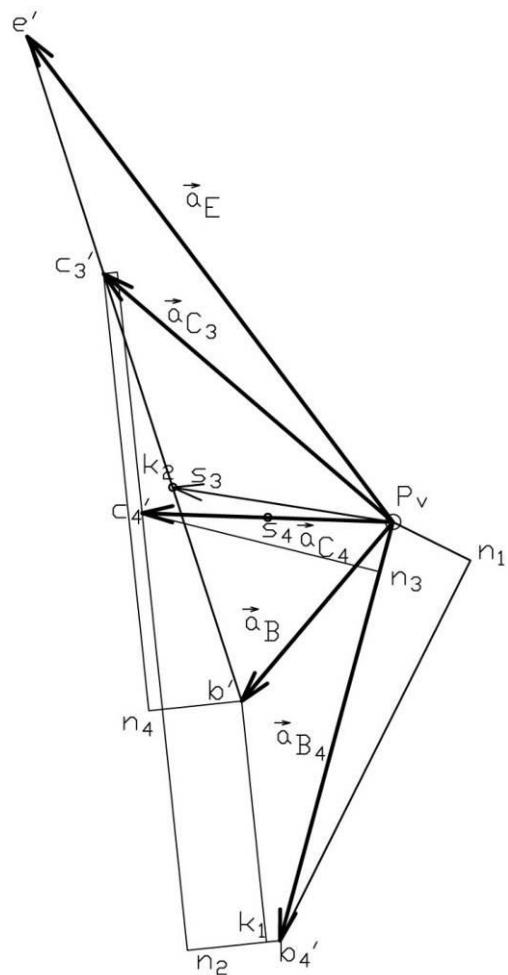
$$F_p \cdot \overline{Rb}_o - F_3 \cdot h_3 + F_{i3} \cdot h_{hi3} - F_{i4} \cdot h_{i4} = 0$$

$$F_p = \frac{8,25 \text{ N} \cdot 8,2 \text{ mm} + 10 \text{ N} \cdot 29,25 \text{ mm} - 17,64 \text{ N} \cdot 23,07 \text{ mm}}{31 \text{ mm}} = -1,51 \text{ N}$$

Pogonska snaga se dobija iz sledećeg izraza:

$$P_p = M_p \cdot \omega_2 = -1,51 \text{ N} \cdot 0,31 \text{ m} \cdot 10 \text{ s}^{-1} = -4,68 \text{ W}$$





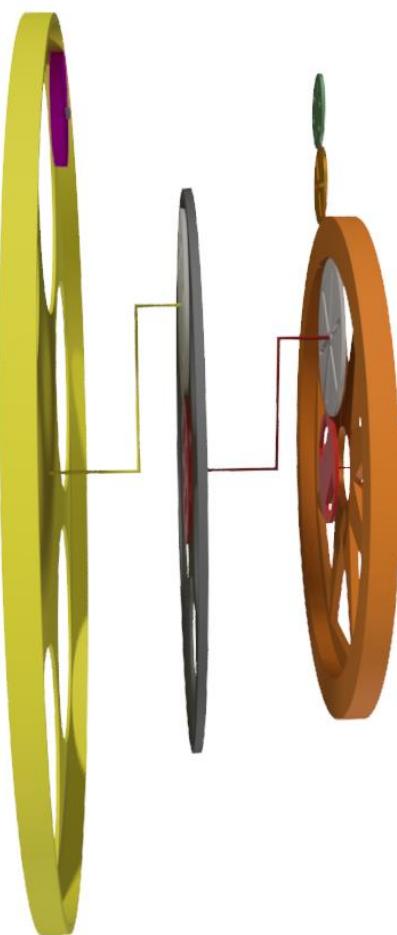
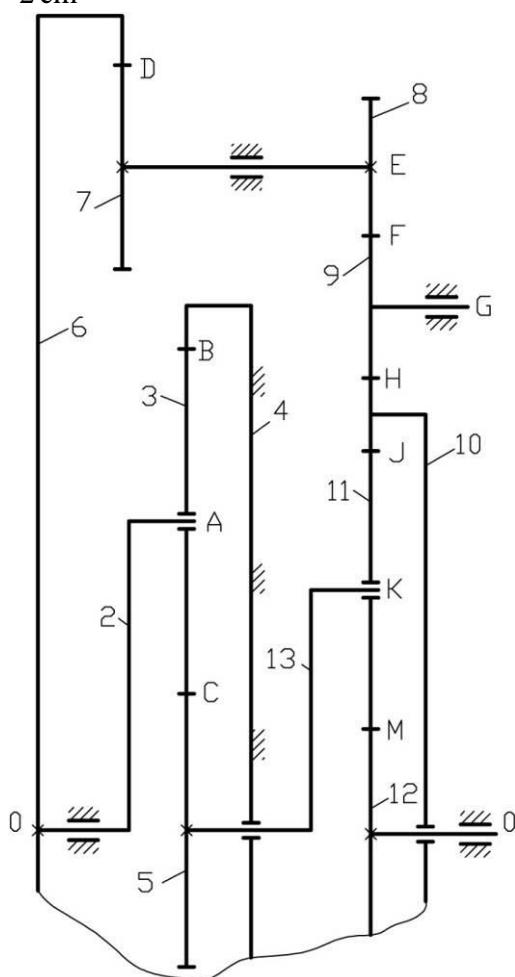
## 6. Određivanje kinematičkih parametara planetarnih penosnika

### Zadatak 6.1.

Grafoanalitičkom i analitičkom metodom odrediti obimne brzine naznačenih tačaka, ugaone brzine članova i prenosni odnos od pogonskog zupčanika 6 do izlaznog gonjenog 12.

Dati podaci su:  $v_A = 1 \frac{m}{s}$  i  $U_L = \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}}$ . Usvojiti razmeru za crtanje obimnih brzina

$$U_v = \frac{1 \frac{m}{s}}{\frac{2 \text{ cm}}{2 \text{ cm}}} \text{ i rastojanje } H = 10 \text{ mm} .$$



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

U prvom koraku traga izračunati ugaonu brzinu nosača 2, i to na sledeći način:

$$\omega_2 = \frac{v_A}{R_2} = \frac{1 \frac{m}{s}}{0,41 \text{ m}} = 2,44 \text{ s}^{-1}$$

Potom se pristupa crtanju velocida, odnosno plana obimnih i ugaonih brzina članova mehanizma. Velocida predstavlja liniju konstantne ugaone brzine i odnosi se na jedan član

(zupčanik). Da bi se dobila linija velocide neophodno je poznavati minimalno dve brzine istog člana (zupčanika). Tačka u kojima su zupčanici spregnuti je zajednička, te ukoliko je ona poznata na osnovu parametara jednog člana, automatski je poznata i za drugi. Na planu brzina, velocide se dobijaju spajanjem vrhova brzina tačaka istog člana (najmanje dve). Detaljnije objašnjenje nalazi se u udžbeniku „Mehanizmi poljoprivrednih mašina“ autora Gligorić R. (2015), Poljoprivredni fakultet Novi Sad.

Razmera za crtanje plana ugaonih brzina određuje se na osnovu izraza:

$$U_{\omega} = \frac{U_v}{H \cdot U_L} = \frac{\frac{1 \frac{m}{s}}{3 \text{ cm}}}{10 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}}} = \frac{\frac{1000 \frac{mm}{s}}{30 \text{ mm}}}{100 \text{ mm}} = \frac{1000 \frac{1}{s}}{3000 \text{ mm}} = \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}}$$

Poznate geometrijske veličine su:

$$OA = 0,41 \text{ m}; OC = 0,18 \text{ m}; OK = 0,38 \text{ m}; OJ = 0,5 \text{ m}; OM = 0,14 \text{ m}; OH = 0,6 \text{ m}; OB = 0,64 \text{ m};$$

$$AB = 0,23 \text{ m}; ED = 0,135 \text{ m}; OD = 1,01 \text{ m}; EF = 0,09 \text{ m}; FG = 0,094 \text{ m}.$$

Ugaone brzine članova prenosnika su:

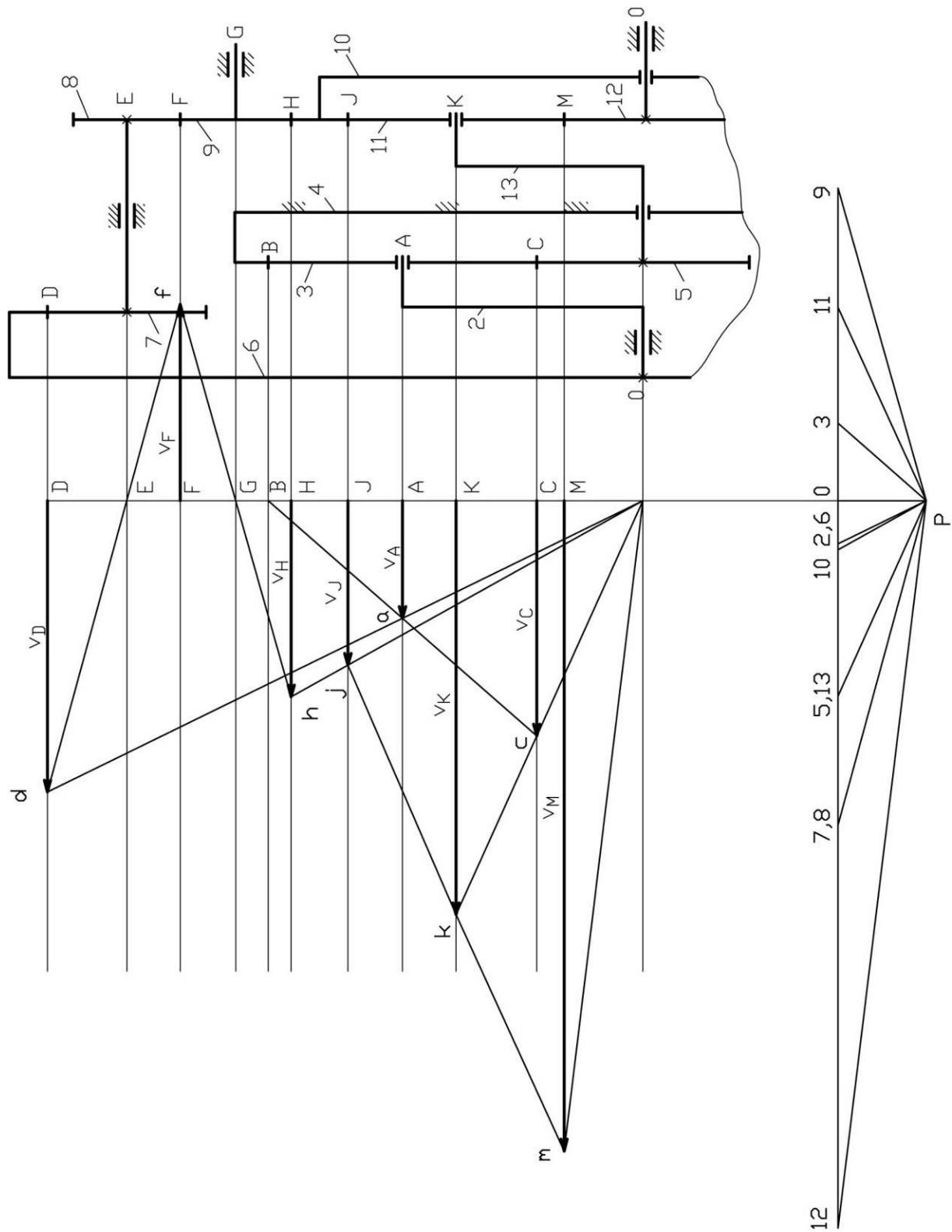
$$\omega_3 = \overline{03} \cdot U_{\omega} = 13,16 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}} = -4,39 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{11} = \overline{011} \cdot U_{\omega} = 32,8 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}} = -10,93 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_9 = \overline{09} \cdot U_{\omega} = 53,08 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}} = -17,69 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{2,6} = \overline{02} \cdot U_{\omega} = 7,34 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}} = 2,45 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{10} = \overline{010} \cdot U_{\omega} = 8,36 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}} = 2,78 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{5,13} = \overline{05} \cdot U_{\omega} = 33,21 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}} = 11,07 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{7,8} = \overline{07} \cdot U_{\omega} = 55,09 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}} = 18,36 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{12} = \overline{012} \cdot U_{\omega} = 123,61 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{s}}{3 \text{ mm}} = 41,2 \text{ s}^{-1}.$$

$$\text{Prenosni odnos } i_{6,12} = \frac{\omega_6}{\omega_{12}} = \frac{2,45 \text{ s}^{-1}}{41,2 \text{ s}^{-1}} = 0,059$$



### Rešenje zadatka-Analitička metoda

S obzirom da su član 2 i 6 međusobno čvrsto spojeni i da im je zajednička osa rotacije, sledi da je  $\omega_2 = \omega_6 = 2,44\text{s}^{-1}$ . Ako posmatramo prenosnik u celini, zaključićemo da su zupčanici 6 i 7, odnosno 8 i 9, kao i 9 i 10 cilindrični zupčanici za paralelna vratila sa spoljašnjim i unutrašnjim zupčanjem bez pomičnih osa rotacije, te se kinematski parametri

mogu izračunati na osnovu prenosnih odnosa.

$$\text{Ugaona brzina } 7 \text{ dobija se iz prenosnog odnosa } i_{2,7} = \frac{\omega_2}{\omega_7} = \frac{R_7}{R_2}, \text{ odakle je}$$

$$\omega_7 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_7} = \frac{2,44 s^{-1} \cdot 1,01 m}{0,135 m} = 18,25 s^{-1}.$$

Ugaona brzina zupčanika 7 i 8 su iste jer se nalaze na istom vratilu te je  $\omega_7 = \omega_8 = 18,25 s^{-1}$ .

Ugaona brzina zupčanika 9 se dobija iz sledećeg uslova:

$$i_{8,9} = \frac{\omega_8}{\omega_9} = -\frac{R_9}{R_8} \Rightarrow \omega_9 = -\frac{\omega_8 \cdot R_8}{R_9} = -\frac{18,25 s^{-1} \cdot 0,09 m}{0,094 m} = -17,47 s^{-1}.$$

Na isti način se dobija ugaona brzina člana 10.

$$i_{9,10} = \frac{\omega_9}{\omega_{10}} = -\frac{R_{10}}{R_9} \Rightarrow \omega_{10} = -\frac{\omega_9 \cdot R_9}{R_{10}} = -\frac{-17,47 s^{-1} \cdot 0,094 m}{0,6 m} = 2,73 s^{-1}$$

Dalje računanje se odnosi na planetarne sklopove. Koristeći Vilisovu jednačinu za prenosni odnos planetarnih prenosnika, odrediće se ostale vrednosti ugaonih brzina.

$$i_{4,5}^2 = \frac{\omega_4 - \omega_2}{\omega_5 - \omega_2} = i_{4,3} \cdot i_{3,5} = \frac{R_3}{R_4} \cdot \left(-\frac{R_3}{R_4}\right) = \frac{0,23 m}{0,64 m} \cdot \left(-\frac{0,18 m}{0,23 m}\right) = -0,28$$

Dalje sledi:

$$-0,28 = \frac{0 - 2,44 s^{-1}}{\omega_5 - 2,44 s^{-1}} \Rightarrow \omega_5 = 11,14 s^{-1}.$$

Kada je poznata ugaona brzina zupčanika 2 i 5, dalje je moguće računati prenosni odnos od zupčanika 10 do 12 preko nosača 13:

$$i_{10,12}^{13} = \frac{\omega_{10} - \omega_{13}}{\omega_{12} - \omega_{13}} = i_{10,11} \cdot (-i_{11,12}) = \frac{R_{11}}{R_{10}} \cdot \left(-\frac{R_{12}}{R_{11}}\right) = -\frac{0,14 m}{0,5 m} = -0,28,$$

te je

$$-0,28 = \frac{2,73 s^{-1} - 11,14 s^{-1}}{\omega_{12} - 11,14 s^{-1}} \Rightarrow \omega_{12} = 40,96 s^{-1}.$$

Poslednji korak je određivanje ugaone brzine zupčanika 3 i prenosni odnos od člana 6 do 12:

$$i_{3,5}^2 = \frac{\omega_3 - \omega_2}{\omega_5 - \omega_2} = -\frac{R_5}{R_3} = -\frac{0,18 m}{0,23 m} = -0,78,$$

$$-0,78 = \frac{\omega_3 - 2,44 s^{-1}}{11,14 s^{-1} - 2,44 s^{-1}} \Rightarrow \omega_3 = -4,31 s^{-1},$$

$$i_{6,12} = \frac{\omega_6}{\omega_{12}} = \frac{2,45 s^{-1}}{40,96 s^{-1}} = 0,059$$

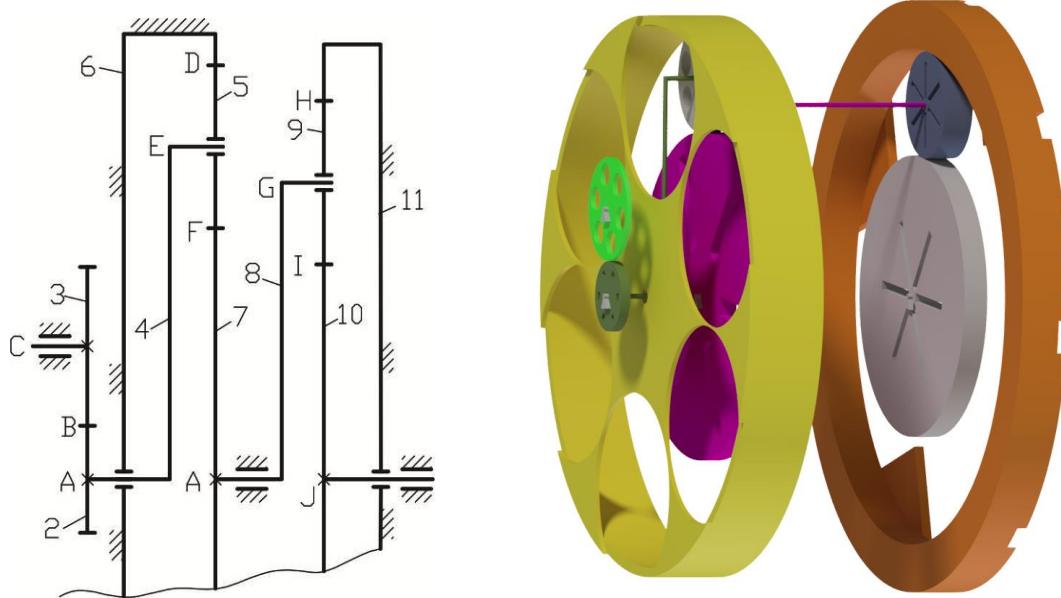
Razlike dobijenih vrednosti kinematickih parametara dobijene grafoanalitičkom i analitičkom metodom su neznatne zbog nepreciznosti grafoanalitičke metode.

### Zadatak 6.2.

Grafoanalitičkom ili analitičkom metodom odrediti obimne brzine naznačenih tačaka, ugaone brzine članova i prenosni odnos od pogonskog zupčanika 3 do izlaznog gonjenog 10.

Dati podaci su:  $v_B = 0,4 \frac{m}{s}$  i  $U_L = \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}}$ . Usvojiti razmeru za crtanje obimnih brzina

$$U_V = \frac{1 \frac{m}{s}}{1 \text{ cm}}.$$



#### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

U prvom koraku traga izračunati ugaonu brzinu zupčanika 2, i to na sledeći način:

$$\omega_2 = \omega_4 = \frac{v_B}{R_2} = \frac{0,4 \frac{m}{s}}{0,072 \text{ m}} = 5,58 \text{ s}^{-1}.$$

Potom se pristupa crtajuvelocida, odnosno planu obimnih i ugaonih brzina mehanizma. Razmera za crtanje plana ugaonih brzina:

$$U_\omega = \frac{U_V}{H \cdot U_L} = \frac{\frac{1 \frac{m}{s}}{1 \text{ cm}}}{\frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}}} = \frac{\frac{100 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{1 \text{ cm}}}{\frac{100 \text{ mm}}{100 \text{ mm}}} = \frac{\frac{100 \frac{1}{\text{s}}}{1 \text{ s}}}{\frac{100 \text{ mm}}{100 \text{ mm}}} = \frac{1 \frac{1}{\text{s}}}{1 \text{ mm}}.$$

Poznate geometrijske veličine su:

$AB = 0,072 \text{ m}$ ;  $BC = 0,105 \text{ m}$ ;  $AE = 0,44 \text{ m}$ ;  $FE = 0,107 \text{ m}$ ;  $AG = 0,34 \text{ m}$ ;  $GI = 0,108 \text{ m}$ ;  $IJ = 0,28 \text{ m}$ ;  $HJ = 0,5 \text{ m}$ ;  $AD = 0,55 \text{ m}$ ;  $DF = 0,215 \text{ m}$ ;  $GH = 0,108 \text{ m}$ .

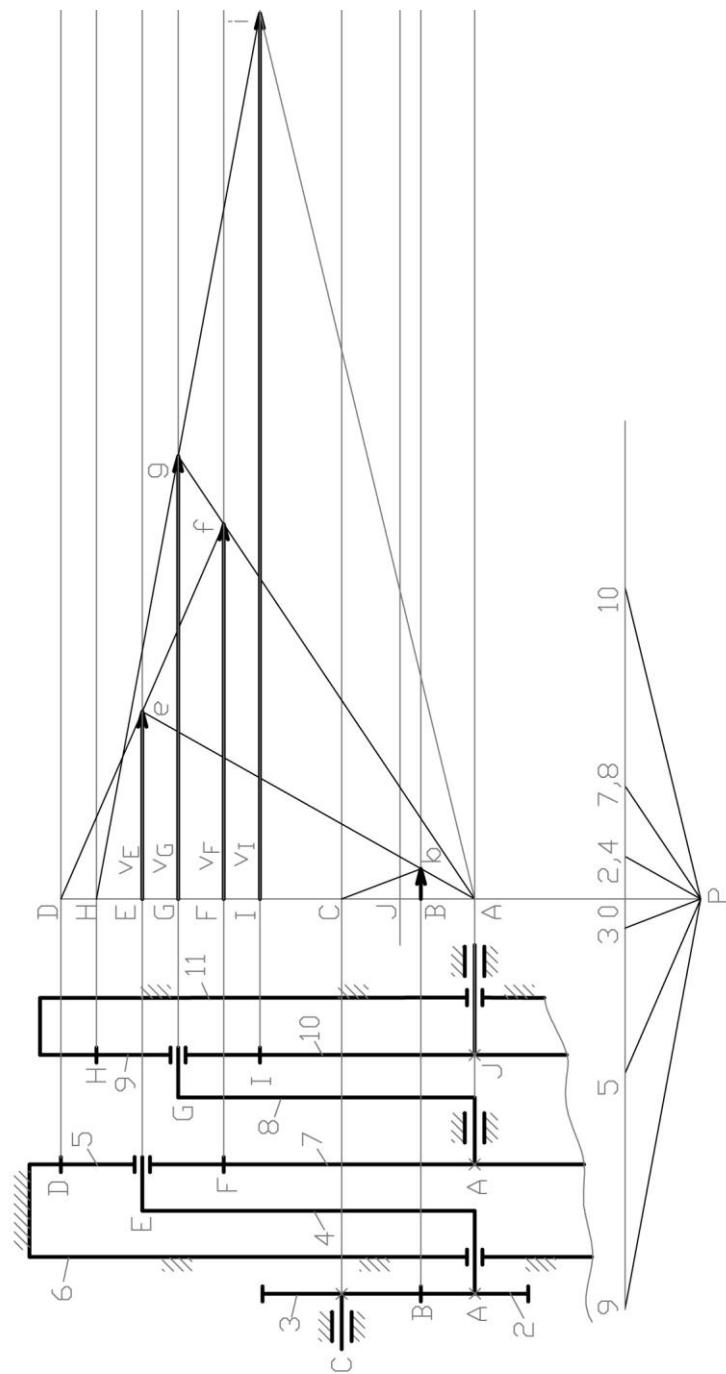
Ugaone brzine članova prenosnika su:

$$\omega_3 = \overline{O_3} \cdot U_\omega = 3,8 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{\text{s}}}{1 \text{ mm}} = -3,8 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_5 = \overline{O_5} \cdot U_\omega = 23,04 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{\text{s}}}{1 \text{ mm}} = -23,04 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_9 = \overline{09} \cdot U_{\omega} = 54,25 \text{ mm} \frac{\frac{1}{\text{s}}}{1 \text{ mm}} = -54,25 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{7,8} = \overline{07} \cdot U_{\omega} = 14,95 \text{ mm} \frac{\frac{1}{\text{s}}}{1 \text{ mm}} = 14,95 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{10} = \overline{010} \cdot U_{\omega} = 41,27 \text{ mm} \frac{\frac{1}{\text{s}}}{1 \text{ mm}} = 41,27 \text{ s}^{-1}.$$

Prenosni odnos  $i_{3,10} = \frac{\omega_3}{\omega_{10}} = \frac{-3,8 \text{ s}^{-1}}{41,88 \text{ s}^{-1}} = -0,09$ .



**Rešenje zadatka-Analitička metoda**

S obzirom da su član 2 i 4 međusobno čvrsto spojeni i da im je zajednička osa rotacije, proizilazi da je  $\omega_2 = \omega_4 = 5,58\text{s}^{-1}$ . Zupčanici 2 i 3 su čeono spregnuti bez pomičnih osa rotacije, te se kinematički parametri mogu izračunati na osnovu prenosnih odnosa.

Ugaona brzina 3 dobija se iz prenosnog odnosa  $i_{2,3} = -\frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{R_3}{R_2}$ , odakle je

$$\omega_3 = \frac{-\omega_2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{5,58\text{s}^{-1} \cdot 0,072\text{m}}{0,105\text{m}} = -3,82 \text{ s}^{-1}.$$

Dalje računanje se odnosi na planetarne sklopove. Koristeći Vilisovu jednačinu za prenosni odnos planetarnih prenosnika, rešiće se ostale vrednosti ugaonih brzina.

$$i_{6,7}^4 = \frac{\omega_6 - \omega_4}{\omega_7 - \omega_4} = i_{6,5} \cdot (-i_{5,7}) = \frac{R_5}{R_6} \cdot \left(-\frac{R_7}{R_5}\right) = \frac{0,215\text{m}}{0,55\text{m}} \cdot \left(-\frac{0,33\text{m}}{0,215\text{m}}\right) = -0,6$$

$$-0,6 = \frac{-5,58}{\omega_7 - 5,58} \Rightarrow \omega_7 = 14,88\text{s}^{-1}$$

Na isti način se dobija ugaona brzina člana 5:

$$i_{5,7}^4 = \frac{\omega_5 - \omega_4}{\omega_7 - \omega_4} = \left(-\frac{R_7}{R_5}\right) = \frac{0,33\text{m}}{0,107\text{m}} = -3,08,$$

$$-3,08 = \frac{\omega_5 - 5,58\text{s}^{-1}}{14,88\text{s}^{-1} - 5,26\text{s}^{-1}} \Rightarrow \omega_5 = -24,36 \text{ s}^{-1}.$$

Kada je poznata ugaona brzina zupčanika 7 i 11, dalje je moguće računati prenosni odnos od zupčanika 11 do 10 preko nosača 8.

$$i_{11,10}^8 = \frac{\omega_{11} - \omega_8}{\omega_{10} - \omega_8} = i_{11,9} \cdot (-i_{9,10}) = \frac{R_9}{R_{11}} \cdot \left(-\frac{R_{10}}{R_9}\right) = -\frac{0,28\text{m}}{0,5\text{m}} = -0,56\text{m},$$

te je

$$-0,56 = \frac{-14,88\text{s}^{-1}}{\omega_{10} - 14,88\text{s}^{-1}} \Rightarrow \omega_{10} = 41,45\text{s}^{-1}.$$

Određivanje ugaone brzine zupčanika 9:

$$i_{9,10}^8 = \frac{\omega_9 - \omega_8}{\omega_{10} - \omega_8} = -\frac{R_{10}}{R_9} = -\frac{0,28\text{m}}{0,108\text{m}} = -2,59,$$

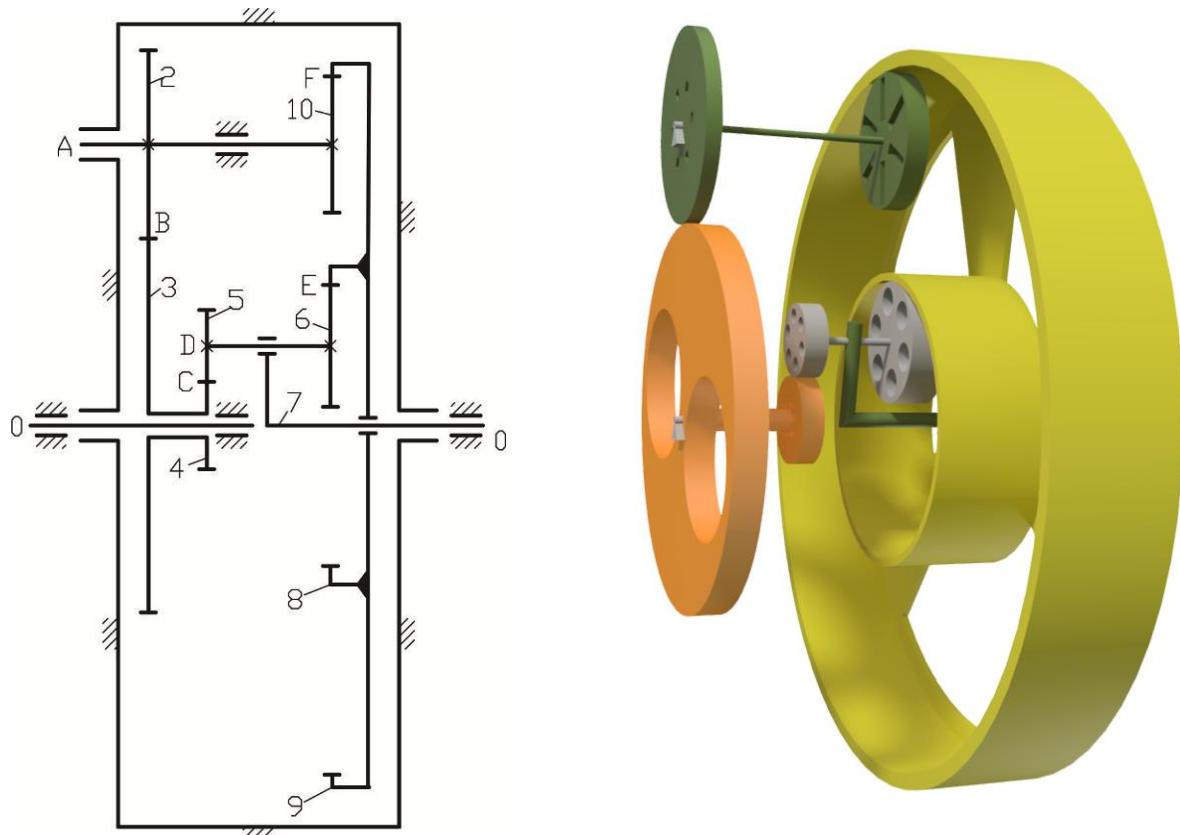
$$-2,59 = \frac{\omega_9 - 14,88\text{s}^{-1}}{41,45\text{s}^{-1} - 14,88\text{s}^{-1}} \Rightarrow \omega_9 = -53,83\text{s}^{-1}.$$

$$\text{Prenosni odnos } i_{3,10} = \frac{\omega_3}{\omega_{10}} = \frac{-3,82\text{s}^{-1}}{41,45\text{s}^{-1}} = -0,092.$$

**Zadatak 6.3.**

Za planetarni prenosnik grafoanalitičkom ili analitičkom metodom odrediti ugaone brzine naznačenih članova i prenosni odnos od ulaznog zupčanika 2 do izlaznog nosača 7. Dato je:

$$n_2 = 200 \text{ } ^\circ/\text{min} \text{ i } U_L = \frac{10 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}. \text{ Preporučene razmere su: } U_V = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} \text{ i } H = 10 \text{ mm}.$$



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Ugaona brzina zupčanika 2 određuje se na sledeći način:

$$\omega_2 = \omega_{10} = \frac{2\pi n}{60} = \frac{2 \cdot 3,14 \cdot 200}{60} = 20,93 \frac{1}{s}$$

Obimna brzina tačke B je

$$v_B = OB \cdot \omega_2 = 0,124m \cdot 20,93s^{-1} = 2,59 \frac{m}{s}$$

Potom se pristupa crtanju velocida, odnosno plana obimnih i ugaonih brzina članova mehanizma. Razmera za ugaone brzine je:

$$U_\omega = \frac{U_v}{H \cdot U_L} = \frac{\frac{1}{s}}{\frac{2 \text{ cm}}{10 \text{ mm}} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}}} = \frac{\frac{100}{s}}{\frac{2 \text{ cm}}{100 \text{ mm}}} = \frac{50 \frac{1}{s}}{100 \text{ mm}} = \frac{5 \frac{1}{s}}{10 \text{ mm}}$$

Poznate geometrijske veličine su:

$$AB = 0,124 \text{ m}; OB = 0,247 \text{ m}; OC = 0,057 \text{ m}; CD = 0,047 \text{ m}; OD = 0,105 \text{ m}; DE = 0,08 \text{ m}; \\ 0E = 0,185 \text{ m}; OF = 0,46 \text{ m}; AF = 0,089 \text{ m}.$$

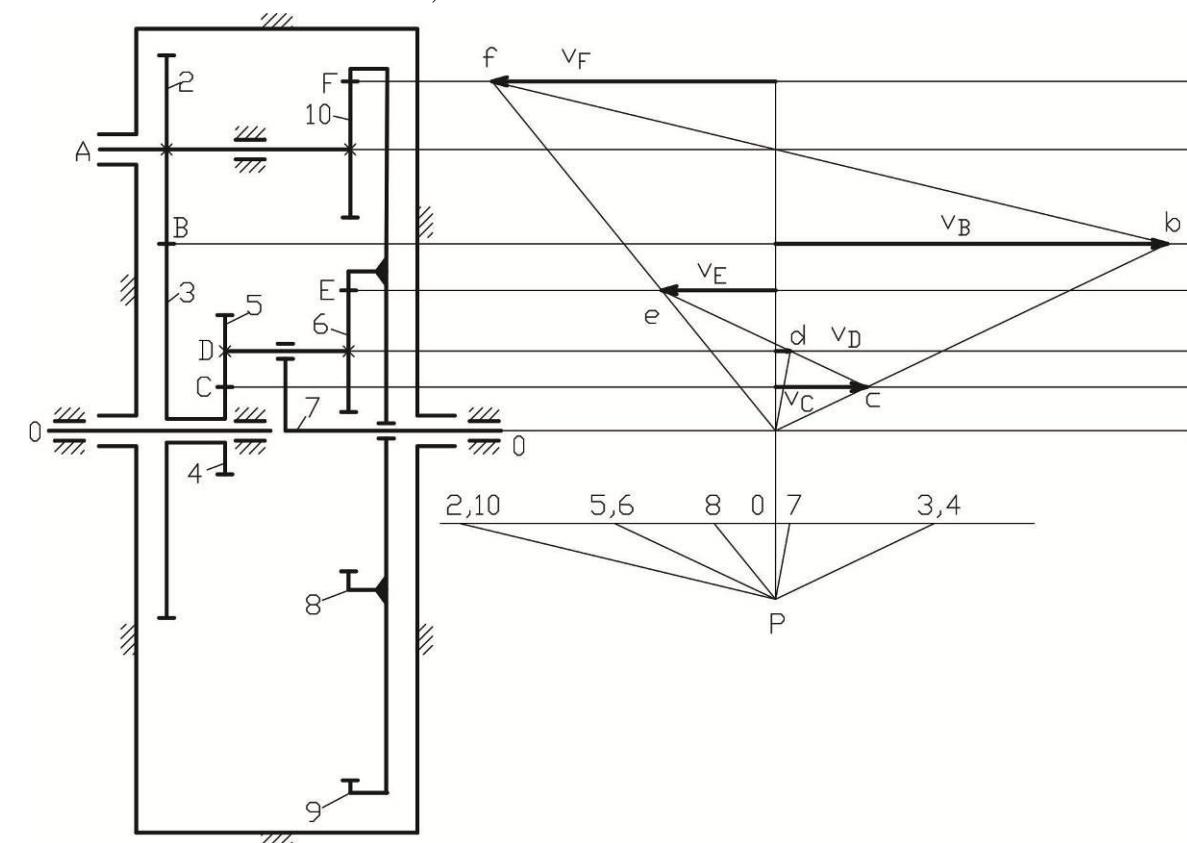
Na osnovu plana određuju se ugaone brzine:

$$\omega_{2,10} = \overline{O2} \cdot U_\omega = 41,67 \text{ mm} \frac{5 \frac{1}{s}}{10 \text{ mm}} = 20,83 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_{5,6} = \overline{O5} \cdot U_\omega = 21,22 \text{ mm} \frac{5 \frac{1}{s}}{10 \text{ mm}} = 10,6 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_8 = \overline{08} \cdot U_{\omega} = 8,2 \text{ mm} \frac{\frac{1}{5} \frac{\text{s}}{\text{mm}}}{10 \text{ mm}} = 4,06 \text{ s}^{-1}, \quad \omega_7 = \overline{07} \cdot U_{\omega} = 1,89 \text{ mm} \frac{\frac{1}{5} \frac{\text{s}}{\text{mm}}}{10 \text{ mm}} = -0,945 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{3,4} = \overline{03} \cdot U_{\omega} = 20,99 \text{ mm} \frac{\frac{1}{5} \frac{\text{s}}{\text{mm}}}{10 \text{ mm}} = 10,49 \text{ s}^{-1}.$$

Prenosni odnos  $i_{2,7} = \frac{\omega_2}{\omega_7} = \frac{20,83 \text{ s}^{-1}}{-0,945 \text{ s}^{-1}} = -22,04$ .



### Rešenje zadatka-Analitička metoda

Iz gore navedenog se mogu izračunati ugaone brzine upaćanika 3 i 8,9 jer se radi o klasičnoj sprezi sa pogonskim upaćnikom 2:

$$i_{2,3} = -\frac{R_3}{R_2} = \frac{\omega_2}{\omega_3} \Rightarrow \omega_3 = -\frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_3} = -\frac{20,85 \text{ s}^{-1} \cdot 0,124 \text{ m}}{0,247 \text{ m}} = -10,46 \text{ s}^{-1}, \omega_4 = \omega_3,$$

$$i_{10,8} = \frac{R_8}{R_{10}} = \frac{\omega_{10}}{\omega_8} \Rightarrow \omega_8 = \frac{\omega_{10} \cdot R_{10}}{R_8} = \frac{20,85 \text{ s}^{-1} \cdot 0,089 \text{ m}}{0,46 \text{ m}} = 4,03 \text{ s}^{-1}, \omega_9 = \omega_8,$$

Dalje računanje se odnosi na planetarne sklopove. Koristeći Vilisovu jednačinu za prenosni odnos planetarnih prenosnika, dobijaju se ostale vrednosti ugaonih brzina.

$$i_{4,8}^7 = \frac{\omega_4 - \omega_7}{\omega_8 - \omega_7} = -i_{4,5} \cdot i_{6,8} = -\frac{R_5}{R_4} \cdot \frac{R_8}{R_6} = -\frac{0,047 \text{ m}}{0,057 \text{ m}} \cdot \frac{0,185 \text{ m}}{0,08 \text{ m}} = -1,96,$$

$$-1,96 = \frac{10,46\text{s}^{-1} - \omega_7}{4,03\text{s}^{-1} - \omega_7} \Rightarrow \omega_7 = -0,94\text{s}^{-1}.$$

Na isti način se dobija ugaona brzina člana 5:

$$i_{4,5}^7 = \frac{\omega_4 - \omega_7}{\omega_5 - \omega_7} = \left( -\frac{R_5}{R_4} \right) = -\frac{0,047\text{m}}{0,057\text{m}} = -0,82,$$

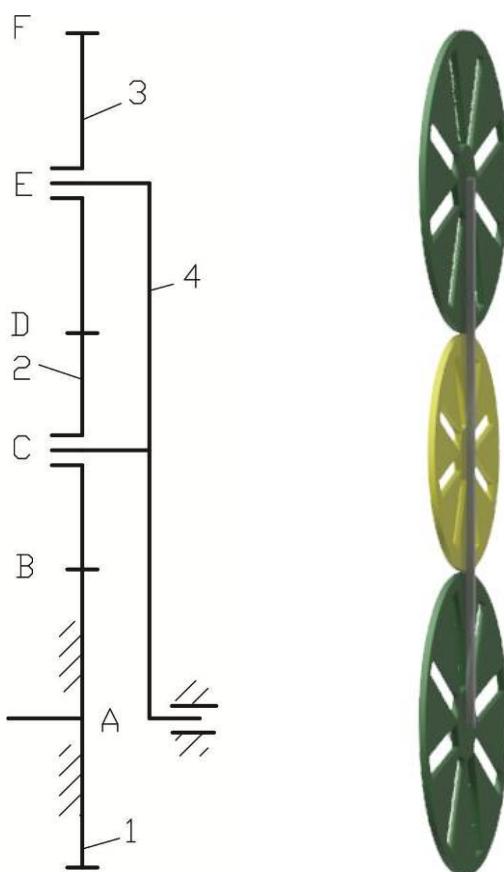
$$-0,82 = \frac{-10,46\text{s}^{-1} - 0,94\text{s}^{-1}}{\omega_5 - 0,94\text{s}^{-1}} \Rightarrow \omega_5 = -10,67\text{ s}^{-1}.$$

#### Zadatak 6.4.

Za epiciklični planetarni prenosnik dati su podaci:  $\omega_4 = \pm 10\text{s}^{-1}$ ,  $U_V = \frac{1\text{m}}{1\text{cm}} i$

$$U_L = \frac{10\text{mm}}{1\text{mm}}. \text{ Odrediti:}$$

- a) obimnu brzine tačke C,
- b) ugaonu brzinu zupčanika 3 i
- c) prenosni odnos od pogonskog člana (4) do zupčanika 3.



**Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda**

U prvom koraku će se izračunati obimne brzine u tački C i E.

$$v_C = \overline{AC} \cdot U_L \cdot \omega_4 = 35,63 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}} \cdot (\pm 10 \text{ s}^{-1}) = \pm 3,563 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$v_E = \overline{AE} \cdot U_L \cdot \omega_4 = 71,43 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}} \cdot (\pm 10 \text{ s}^{-1}) = \pm 7,143 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Potom se pristupa crtanju velocida, odnosno plana obimnih i ugaonih brzina članova mehanizma. Razmera za plan ugaonih brzina je:

$$U_\omega = \frac{U_v}{H \cdot U_L} = \frac{\frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{cm}}}{\frac{1 \text{cm}}{20 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{mm}}}} = \frac{\frac{100 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{1 \text{cm}}}{\frac{1 \text{cm}}{200 \text{ mm}}} = \frac{1 \frac{1}{\text{s}}}{\frac{1}{2 \text{mm}}}.$$

Poznate geometrijske veličine su:

$AB = 0,19 \text{ m}$ ;  $AD = 0,51 \text{ m}$ ;  $AC = 0,36 \text{ m}$ ;  $AE = 0,71 \text{ m}$ ;  $BC = 0,16 \text{ m}$ ;  $DE = 0,20 \text{ m}$ . Ugaone brzine se dobijaju iz sledećih relacija:

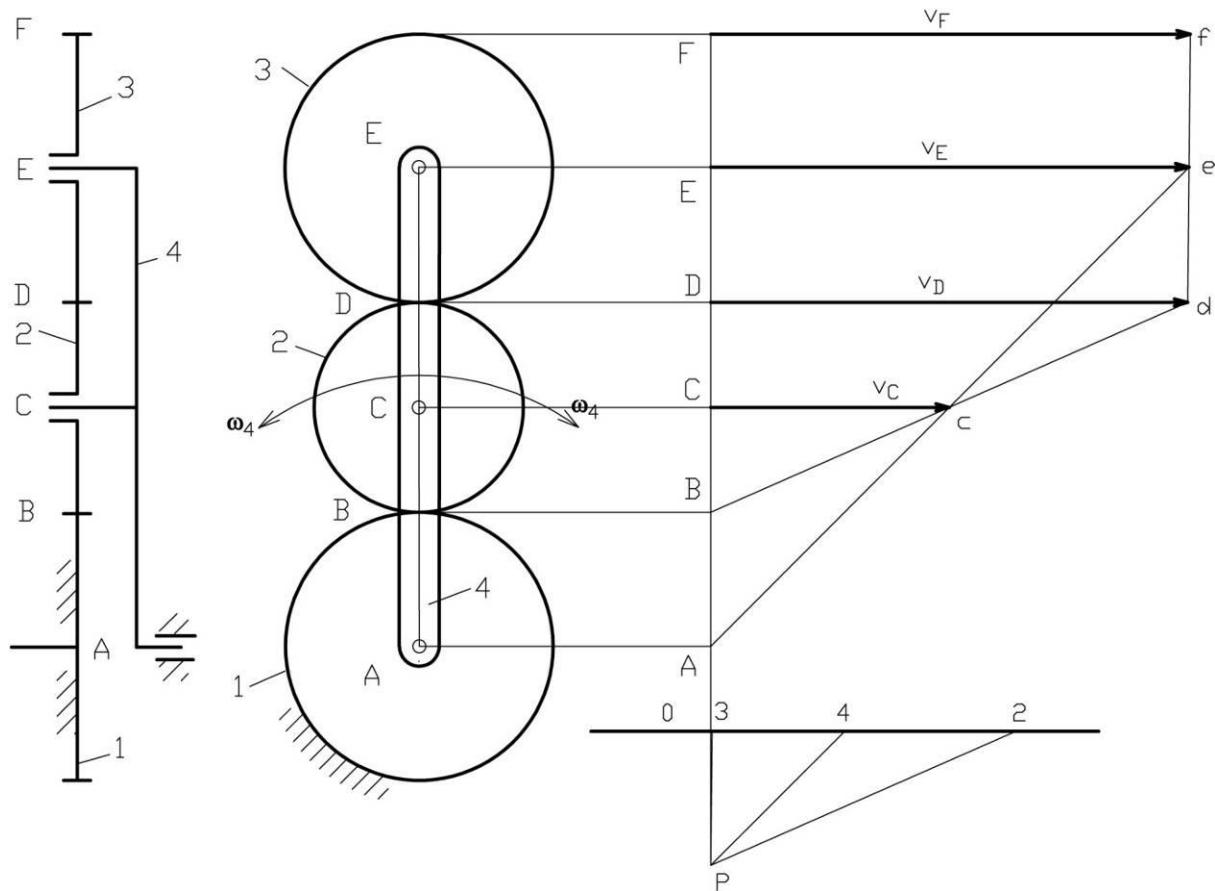
$$\omega_4 = \overline{04} \cdot U_\omega = 19,99 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{\text{s}}}{2 \text{mm}} = 10 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_2 = \overline{02} \cdot U_\omega = 45,57 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{\text{s}}}{2 \text{mm}} = 22,78 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_3 = \overline{03} \cdot U_\omega = 0,07 \text{ mm} \frac{1 \frac{1}{\text{s}}}{2 \text{mm}} = 0,0035 \text{ s}^{-1}.$$

Prenosni odnos je:

$$i_{4,3} = \frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{\pm 10}{0} = \infty.$$

**Analitička metoda-Rešenje zadatka**

Iz prenosnog odnosa  $i_{1,3}^4 = \frac{\omega_1 - \omega_4}{\omega_3 - \omega_4}$  dobija se  $\omega_3 = \frac{i_{13}^4 \cdot \omega_4 - \omega_4}{i_{13}^4} = \frac{1 \cdot 10 - 10}{1} = 0 \text{ s}^{-1}$  za

$$\omega_4 = +10 \text{ s}^{-1} \text{ jer je } i_{1,3} = \frac{D_2}{D_1} \cdot \frac{D_3}{D_2} = \frac{D_3}{D_1} = \frac{0,4}{0,4} = 1.$$

Iz istog izraza za  $\omega_4 = -10 \text{ s}^{-1}$  dobija se

$$\omega_3 = \frac{i_{13}^4 \cdot \omega_4 - \omega_4}{i_{13}^4} = \frac{1 \cdot (-10) - (-10)}{1} = 0 \text{ s}^{-1}.$$

To znači da se zupčanik 3 ne obrće već se translatorno pomera po kružnici poluprečnika AE. Prenosni odnos je:

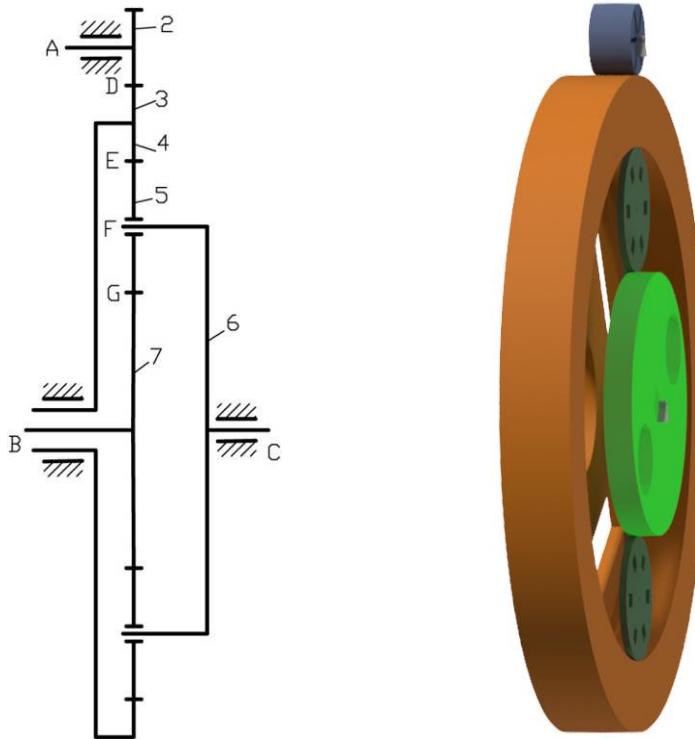
$$i_{4,3} = \frac{\omega_4}{\omega_3} = \frac{\pm 10}{0} = \infty.$$

**Zadatak 6.5.**

Za diferencijalni planetarni prenosnik dati su podaci:  $\omega_7 = 12 \text{ s}^{-1}$ ,  $\omega_2 = -8 \text{ s}^{-1}$  i  $U_L = \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}}$ . Grafoanalitičkom ili analitičkom metodom odrediti:

- ugaonu brzinu nosača 6,
- obimnu brzine tačke F i
- prenosni odnos od pogonskog zupčanika 7 do izlaznog gonjenog nosača 6.

Usvojiti razmeru za crtanje obimnih brzina  $U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{cm}}$  i rastojanje  $H = 10 \text{ mm}$ .



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Obimne brzine tačaka D i G se računa iz izraza:

$$v_D = R_2 \cdot \omega_2 = 0,050 \cdot (-8) = -0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ i}$$

$$v_G = R_7 \cdot \omega_7 = 0,182 \cdot 12 = 2,184 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Poznate geometrijske veličine su:

$BG = 0,182 \text{ m}$ ;  $BF = 0,3 \text{ m}$ ;  $FG = 0,087 \text{ m}$ ;  $BE = 0,035 \text{ m}$ ;  $BD = 0,45 \text{ m}$ ;  $AD = 0,46 \text{ m}$ .

Na osnovu plana brzina dobija se obimna brzina tačke F:

$$v_F = \overline{Ff} \cdot U_v = 1,87 \text{ cm} \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{cm}} = 0,93 \text{ m/s.}$$

Razmera za ugaone brzine jednaka je:

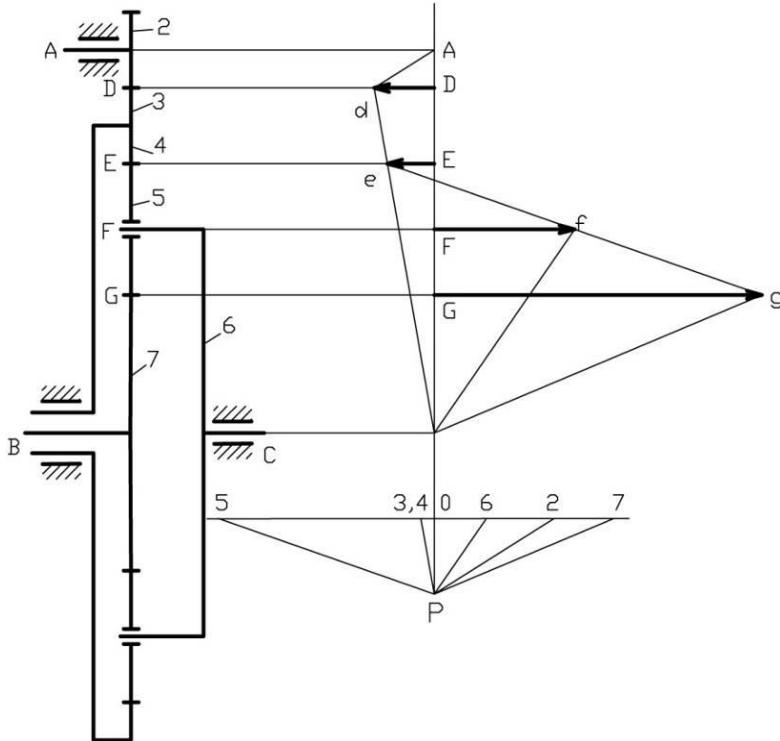
$$U_\omega = \frac{U_v}{H \cdot U_L} = \frac{\frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{cm}}}{10 \text{mm} \cdot \frac{10 \text{mm}}{1 \text{mm}}} = \frac{5 \text{ s}^{-1}}{10 \text{mm}}.$$

Ugaona brzina člana 6 je:

$$\omega_6 = \overline{O6} \cdot U_\omega = 6,95 \text{ mm} \frac{5 \text{ s}^{-1}}{10 \text{mm}} = 3,47 \text{ s}^{-1}.$$

Prenosni odnos je:

$$i_{7,6} = \frac{\overline{07}}{\overline{06}} = \frac{7,18}{2,08} = 3,45.$$



### Rešenje zadatka-Analitička metoda

Ugaona brzina prstenastog zupčanika 3,4 dobija se iz prenosnog odnosa  $i_{2,3} = \frac{\omega_2}{\omega_3} = \frac{D_3}{D_2}$ ,

odakle je  $\omega_3 = \frac{\omega_2 \cdot R_2}{R_3} = \frac{-8 \cdot 50}{450} = -0,888 \text{ s}^{-1}$ . Ugaona brzina prstenastog zupčanika 4 je

$\omega_4 = \omega_3 = -0,888 \text{ s}^{-1}$ . Prenosni odnos od zupčanika 7 do 4 relativno prema nosaču 6 je:

$$i_{7,4}^6 = \frac{\omega_7 - \omega_6}{\omega_4 - \omega_6} = \frac{-R_5 \cdot R_4}{R_7 \cdot R_5} = -\frac{87}{182} \cdot \frac{356}{87} = -1,95, \text{ odakle je:}$$

$$i_{7,4}^6 (\omega_4 - \omega_6) = \omega_7 - \omega_6,$$

$$-1,95\omega_4 + 1,95\omega_6 - \omega_7 = -\omega_6,$$

$$-1,95 \cdot (-0,888) - 12 = -\omega_6 - 1,95 \cdot \omega_6,$$

$$1,731 - 12 = -\omega_6(1 + 1,95),$$

$$-10,27 = -\omega_6 \cdot 2,95,$$

$$\omega_6 = \frac{10,27}{2,95} = 3,481 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

Obimna brzina tačke F je:

$$v_F = R_6 \cdot \omega_6 = 0,269 \cdot 3,481 = 0,936 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

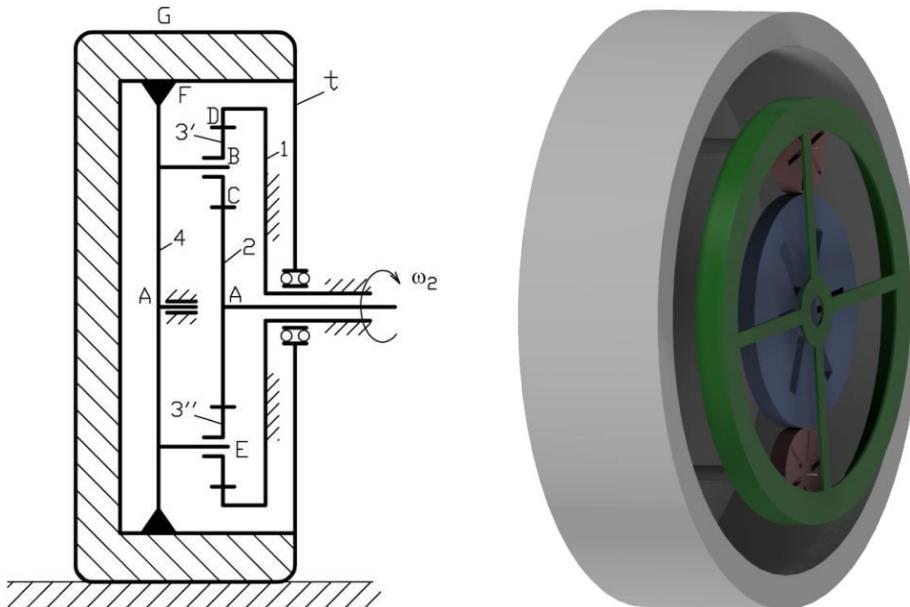
Prenosni odnos je:

$$i_{7,6} = \frac{\omega_7}{\omega_6} = \frac{12}{3,48} = 3,44.$$

### Zadatak 6.6.

Epiciklični planetarni mehanizam pogoni točak traktora (t). Centralni zupčanika (2) dobija pogon od diferencijalnog planetarnog mehanizma traktora. Ugaona brzina zupčanika (2) je  $\omega_2 = 5 \text{ s}^{-1}$ . Razmera crtanja je  $U_L = \frac{1 \text{ m}}{3,5 \text{ cm}}$ . Odrediti ugaonu i obimnu brzinu točka (t). Zadatak rešiti grafo-analitičkom i analitičkom metodom. Razmera za crtanje plana obimnih brzina je  $U_v = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ cm}}$ .

(t). Zadatak rešiti grafo-analitičkom i analitičkom metodom. Razmera za crtanje plana obimnih brzina je  $U_v = \frac{1 \text{ m}}{2 \text{ cm}}$ .



#### Rešenje zadatka-Grafička metoda

Kinematicki parametri:

$$v_t = \overline{Gg} \cdot U_v = 3,68 \text{ cm} \cdot \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}} = 1,84 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

$$U_\omega = \frac{U_v}{H \cdot U_L} = \frac{\frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{2 \text{ cm}}}{\frac{1 \text{ cm}}{3,5 \text{ cm}}} = \frac{1 \text{ s}^{-1}}{0,57 \text{ cm}},$$

$$\omega_t = \overline{0t} \cdot U_\omega = 3,06 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ s}^{-1}}{1,71 \text{ cm}} = 1,789 \text{ s}^{-1}.$$

#### Rešenje zadatka-Analitička metoda

Prenosni odnos za planetarne prenosnike se određuje kao:

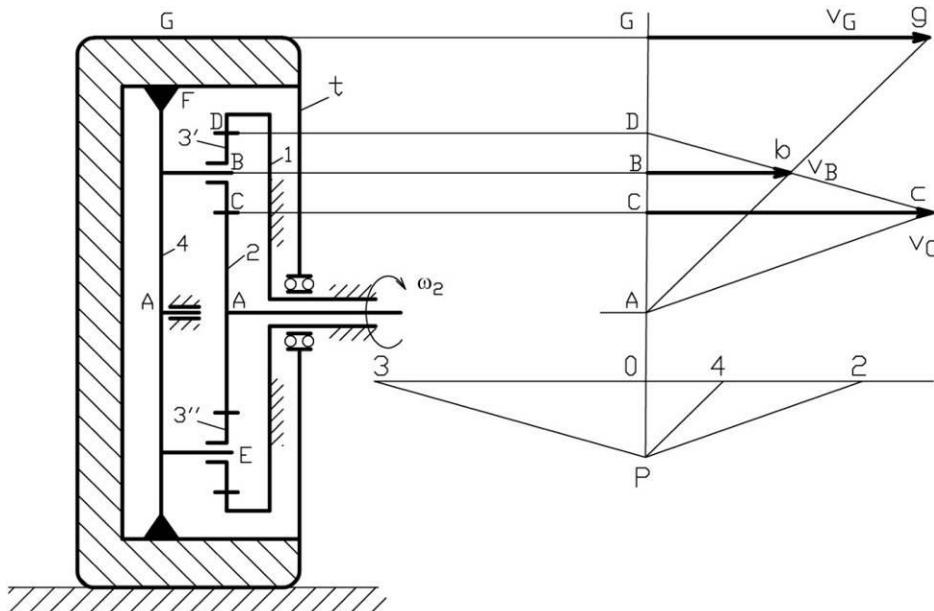
$$i_{21}^4 = \frac{\omega_2 - \omega_4}{\omega_1 - \omega_4},$$

odakle je ugaona brzina nosača 4  $\omega_4 = \frac{\omega_2}{1 - i_{21}^4}$  jer je  $\omega_1 = 0$ . Prenosni odnos  $i_{21}^4$  jednak je:

$$i_{21}^4 = \frac{-R_3}{R_2} \cdot \frac{R_1}{R_3} = -\frac{R_1}{R_2} = -\frac{2,37 \text{ cm}}{1,31 \text{ cm}} = -1,81,$$

$$\text{odakle je } \omega_4 = \frac{\omega_2}{1-i_{21}^4} = \frac{5}{1+1,809} = 1,77 \text{ s}^{-1}.$$

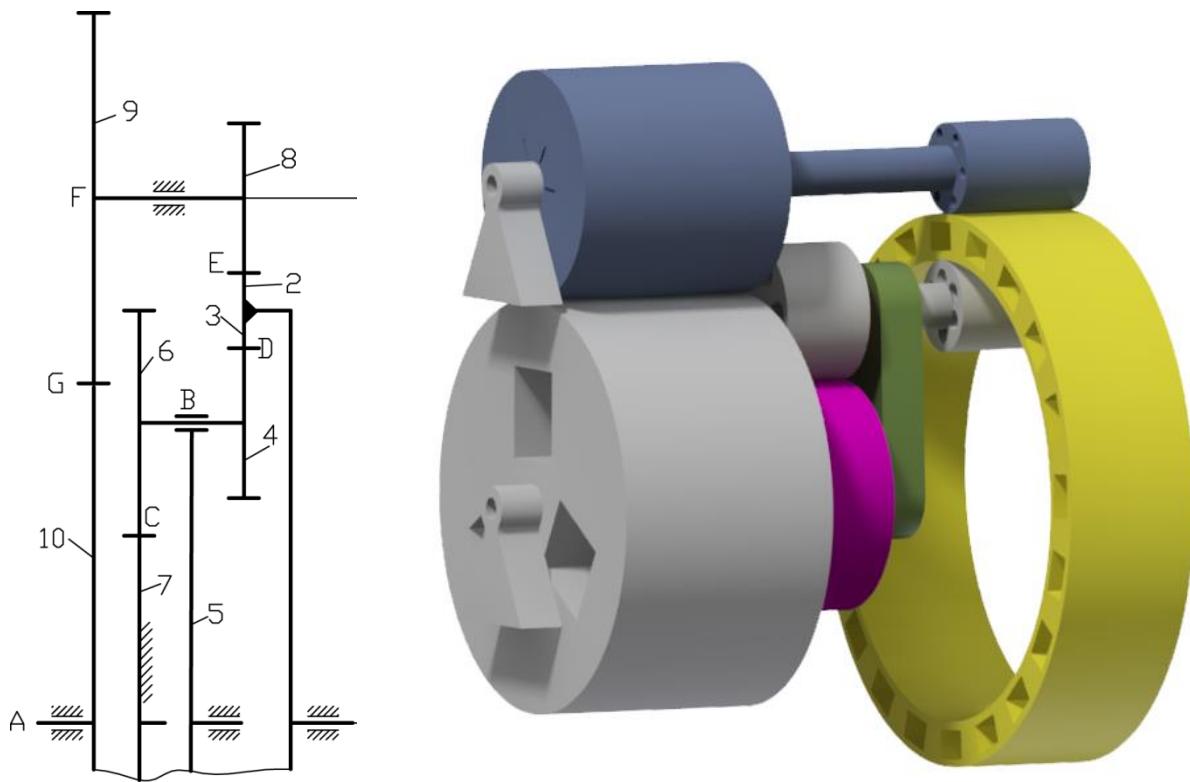
Obimna brzina točka je  $v_t = R_t \cdot \omega_4 = 1,037 \text{ m} \cdot 1,77 \text{ s}^{-1} = 1,836 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ .



### Zadatak 6.8.

Planetarni epiciklični prenosnik nosač (5) ugaonom brzinom  $\omega_5 = 100 \text{ s}^{-1}$ . Satelit (6) obrće se oko nepokretnog zupčanika (7), a satelit (4) obrće se unutar prstenastog zupčanika (3). Prstenasti zupčanik sa spoljnjim zupčanjem (2) spregnut je sa zupčanicom (8). Dati su poluprečnici:  $R_2 = 60 \text{ mm}$ ,  $R_3 = 50 \text{ mm}$ ,  $R_4 = 10 \text{ mm}$ ,  $R_5 = 40 \text{ mm}$ ,  $R_6 = 15 \text{ mm}$ ,  $R_7 = 25 \text{ mm}$ ,  $R_8 = 10 \text{ mm}$ ,  $R_9 = 25 \text{ mm}$  i  $R_{10} = 45 \text{ mm}$ . Grafoanalitičkom i analitičkom metodom odrediti: obimne brzine tačaka D i G, ugaone brzine zupčanika i prenosni odnos od nosača (5) do zupčanika (10). Pri korišćenju grafoanalitičke metode usvojiti razmeru za

$$\text{brzine } U_v = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,5 \text{ cm}}.$$



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Ugaona brzina nosača 5 se dobija iz sledećeg izraza:

$$v_B = R_5 \cdot \omega_5 = 0,04 \cdot 100 = 4 \text{ m/s}.$$

Razmera za plan ugaonih brzina se dobija iz izraza:

$$U_{\omega} = \frac{U_v}{H \cdot U_L} = \frac{\frac{1 \text{ m}}{0,5 \text{ cm}}}{2 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ cm}}{1 \text{ cm}}} = \frac{100 \frac{\text{cm}}{\text{s}}}{0,5 \text{ cm} \cdot 2 \text{ cm}} = \frac{1 \text{ s}^{-1}}{1 \text{ cm}} = \frac{1 \text{ s}^{-1}}{0,01 \text{ cm}}.$$

Iz plana obimnih i ugaonih brzina dobijene su sledeće vrednosti:

$$v_D = \overline{Dd} \cdot U_v = 3,33 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ m/s}}{0,5 \text{ cm}} = 6,66 \text{ m/s},$$

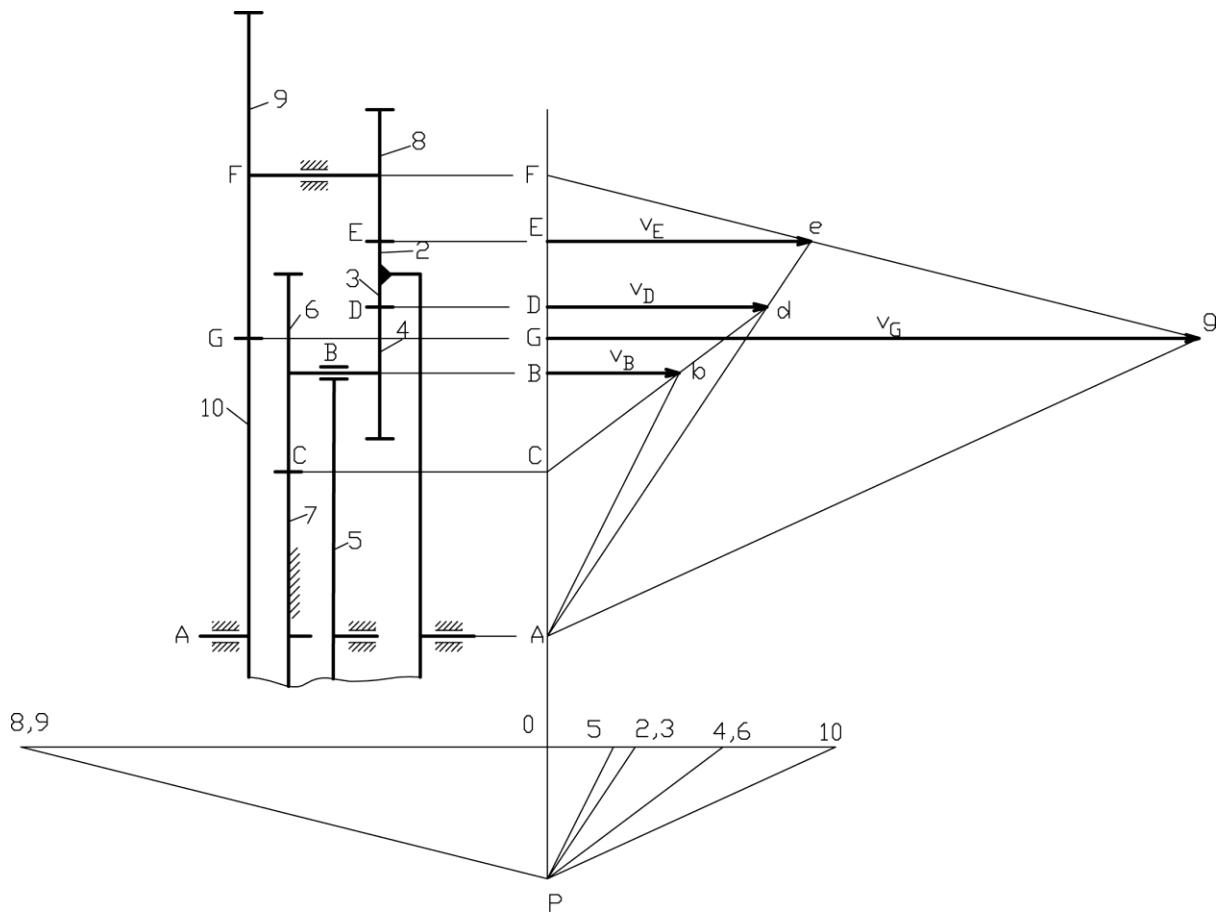
$$\omega_2 = \omega_3 = \overline{02} \cdot U_{\omega} = 1,34 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ s}^{-1}}{0,01 \text{ cm}} = 134 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_4 = \omega_6 = \overline{04} \cdot U_{\omega} = 2,66 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ s}^{-1}}{0,01 \text{ cm}} = 266 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_8 = \omega_9 = \overline{08} \cdot U_{\omega} = 8,00 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ s}^{-1}}{0,01 \text{ cm}} = 800 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{10} = \overline{010} \cdot U_{\omega} = 4,37 \text{ cm} \cdot \frac{1 \text{ s}^{-1}}{0,01 \text{ cm}} = 437 \text{ s}^{-1},$$

$$i_{5,10} = \frac{\omega_5}{\omega_{10}} = \frac{100}{437} = 0,228.$$

**Rešenje zadatka-Analitička metoda**

Obimna brzina zupčanika 5 dobija se iz obrasca:

$$v_B = R_5 \cdot \omega_5 = 0,04 \cdot 100 = 4 \frac{m}{s}.$$

Određivanje ostalih parametara određuje se primenom Vilisovog izraza, te sledi da je:

$$i_{7,6}^5 = \frac{\omega_7 - \omega_5}{\omega_6 - \omega_5} = -\frac{R_6}{R_7} = -\frac{15 \text{ mm}}{25 \text{ mm}} = -0,6.$$

Dalje sledi da je:

$$\omega_6 = \frac{-\omega_5 + i_{7,6}^5 \cdot \omega_5}{i_{7,6}^5} = \frac{-100 + (-0,6) \cdot 100}{-0,6} = 266,66 s^{-1}$$

S obzirom da su zupčanici 4 i 6 na zajedničkom vratilu, njihove ugaone brzine su jednake:

$$\omega_4 = \omega_6 = 266,66 s^{-1}.$$

Ugaona brzina zupčanika 2 i 3 se računa iz sledećih izraza:

$$i_{3,4}^5 = \frac{\omega_3 - \omega_5}{\omega_4 - \omega_5} = \frac{R_4}{R_3} = \frac{10}{50} = 0,2,$$

$$\omega_3 = (266,66 - 100) \cdot 0,2 + 100 = 133,32 s^{-1},$$

$$\omega_2 = \omega_3 = 133,32 s^{-1}.$$

Ugaona brzina zupčanika 10 se računa iz sledećih izraza:

$$i_{2,10} = i_{2,8} \cdot i_{9,10} = \frac{R_8}{R_2} \cdot \frac{R_{10}}{R_9} = \frac{10}{60} \cdot \frac{45}{25} = 0,3,$$

$$i_{2,10} = \frac{\omega_2}{\omega_{10}},$$

$$\omega_{10} = \frac{\omega_2}{i_{2,10}} = \frac{133,32}{0,3} = 444,4 \text{ s}^{-1}.$$

Prenosni odnos od člana 5 do 10 je:

$$i_{5,10} = \frac{\omega_5}{\omega_{10}} = \frac{100}{444,4} = 0,225.$$

Obimne brzine tačaka D i F su:

$$v_D = R_3 \cdot \omega_3 = 0,050 \text{ m} \cdot 133,32 \text{ s}^{-1} = 6,66 \frac{\text{m}}{\text{s}},$$

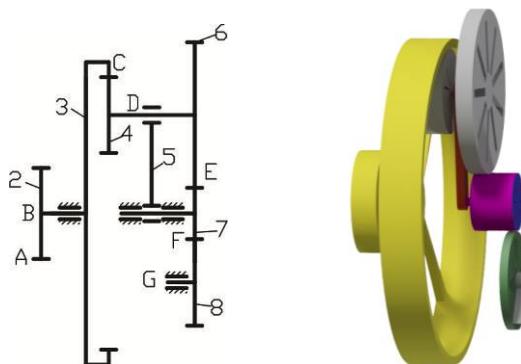
$$v_E = R_{10} \cdot \omega_{10} = 0,045 \text{ m} \cdot 444,4 \text{ s}^{-1} = 19,98 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

### Zadatak 6.9.

Za diferencijalni planetarni prenosnik dati su podaci:  $v_A = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ,  $\omega_8 = 263,15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$  i  $U_L = \frac{1 \text{ m}}{10 \text{ cm}}$ . Grafoanalitičkom ili analitičkom metodom odrediti:

- a) obimne brzine tačaka C i E,
- b) ugaone brzine prenosnika 4 i 5,

Ako se koristi grafoanalitička metoda usvojiti razmeru za crtanje obimnih brzina  $U_V = \frac{1 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{1 \text{ mm}}$



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

U prvom koraku će se izračunati obimna brzina u tački F.

$$v_F = \omega_8 \cdot R_8 = 263,15 \text{ s}^{-1} \cdot 0,057 \text{ m} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Potom se pristupa crtajući velocida, odnosno plana obimnih i ugaonih brzina članova mehanizma.

Razmera crtanja ugaonih brzina je:

$$U_{\omega} = \frac{U_v}{H \cdot U_L} = \frac{\frac{1 \text{ m}}{\text{s}}}{\frac{1 \text{ mm}}{15 \text{ mm}} \cdot \frac{10 \text{ mm}}{1 \text{ mm}}} = \frac{1000 \frac{\text{mm}}{\text{s}}}{\frac{1 \text{ mm}}{150 \text{ mm}}} = \frac{6,67 \frac{1}{\text{s}}}{\frac{1 \text{ mm}}{1 \text{ mm}}}.$$

Poznate geometrijske veličine su:

$AB = 0,06 \text{ m}$ ;  $BD = 0,13 \text{ m}$ ;  $CB = 0,18 \text{ m}$ ;  $CD = 0,05 \text{ m}$ ;  $BE = 0,034 \text{ m}$ ;  $FG = 0,057 \text{ m}$ ;

$DE = 0,096 \text{ m}$ .

Ugaone brzine se dobijaju iz sledećih relacija:

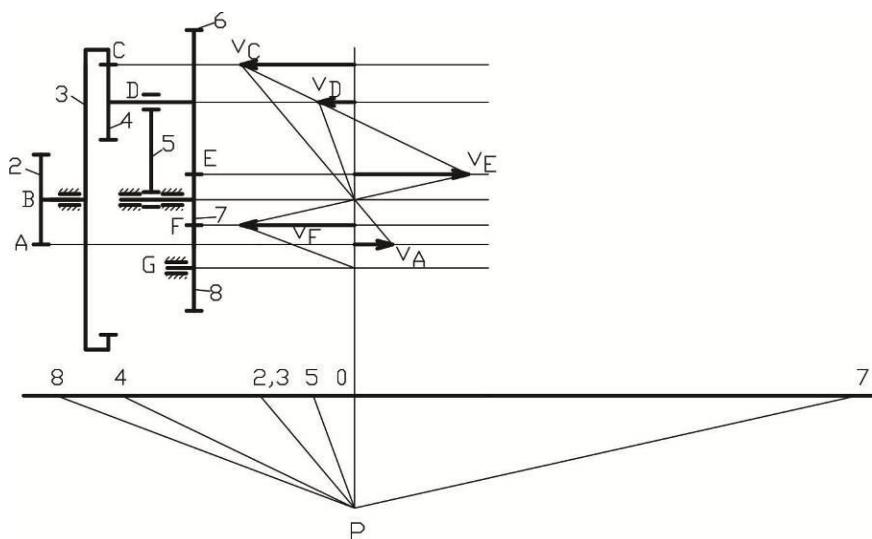
$$\omega_4 = \omega_6 = \overline{04} \cdot U_{\omega} = 30,79 \text{ mm} \frac{\frac{6,67}{1}}{1 \text{ mm}} = 205,36 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_{2,3} = \overline{02} \cdot U_{\omega} = 12,5 \text{ mm} \frac{\frac{6,67}{1}}{1 \text{ mm}} = 83,37 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_8 = \overline{08} \cdot U_{\omega} = 39,37 \text{ mm} \frac{\frac{6,67}{1}}{1 \text{ mm}} = 262,51 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_7 = \overline{07} \cdot U_{\omega} = 66,4 \text{ mm} \frac{\frac{6,67}{1}}{1 \text{ mm}} = -443 \text{ s}^{-1},$$

$$\omega_5 = \overline{05} \cdot U_{\omega} = 41,27 \text{ mm} \frac{\frac{1}{1}}{1 \text{ mm}} = 41,27 \text{ s}^{-1}.$$



### Rešenje zadatka-Analitička metoda

S obzirom da su član 2 i 3 međusobno čvrsto spojeni i da im je zajednička osa rotacije, proistiće da je  $\omega_2 = \omega_3$ .

$$\omega_2 = \omega_3 = \frac{v_A}{R_2} = \frac{5 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,06 \text{ m}} = 83,35 \text{ s}^{-1}$$

Zupčanici 7 i 8 su čeono spregnuti bez pomičnih osa rotacije, te se kinematički parametri mogu izračunati na osnovu prenosnih odnosa.

$$\omega_7 = -\frac{R_8 \cdot \omega_8}{R_7} = \frac{-0,057 \text{ m} \cdot 263,15 \text{ s}^{-1}}{0,034 \text{ m}} = -441,16 \text{ s}^{-1}$$

Dalje računanje se odnosi na planetarne grupe. Koristeći Vilisovu jednačinu za prenosni odnos planetarnih prenosnika, rešavaju se ostale vrednosti ugaonih brzina:

$$i_{3,7}^5 = \frac{\omega_3 - \omega_5}{\omega_7 - \omega_5} = i_{3,4} \cdot (-i_{6,7}) = \frac{R_4}{R_3} \cdot \left(-\frac{R_7}{R_6}\right) = \frac{0,05 \text{ m}}{0,18 \text{ m}} \cdot \left(-\frac{0,034 \text{ m}}{0,096 \text{ m}}\right) = -0,098,$$

$$-0,098 = \frac{83,35 \text{ s}^{-1} - \omega_5}{-441,16 \text{ s}^{-1} - \omega_5} \Rightarrow \omega_5 = 36,51 \text{ s}^{-1}.$$

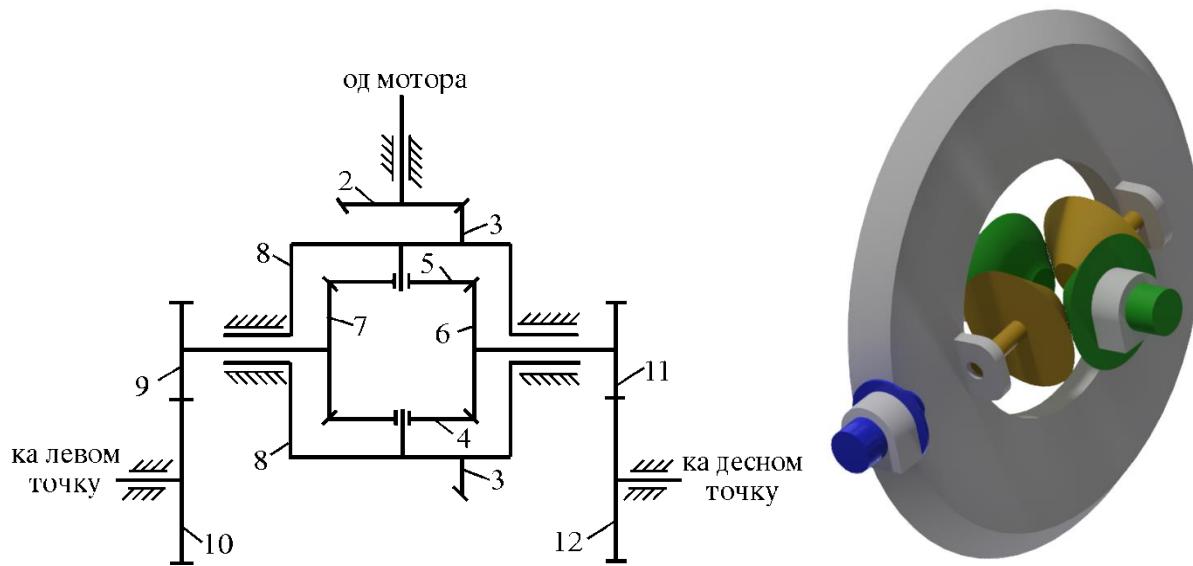
Na isti način se dobija ugaona brzina člana 4:

$$i_{3,4}^5 = \frac{\omega_3 - \omega_5}{\omega_4 - \omega_5} = \left(\frac{R_4}{R_3}\right) = \frac{0,05 \text{ m}}{0,18 \text{ m}} = 0,28,$$

$$0,28 = \frac{83,3 \text{ s}^{-1} - 36,51 \text{ s}^{-1}}{\omega_4 - 36,51 \text{ s}^{-1}} \Rightarrow \omega_4 = 203,32 \text{ s}^{-1}.$$

### Zadatak 6.10.

Za diferencijalni planetarni prenosnik za pogon točkova traktora odrediti ugaone brzine desnog i levog točka. Dati podaci su:  $\omega_2 = 50 \text{ s}^{-1}$ , brojevi zubaca zupčanika  $z_2 = 15$ ,  $z_3 = 72$ .  $z_4 = z_5$ ,  $z_6 = z_7$ ,  $z_9 = 16$ ,  $z_{10} = 65$ ,  $z_{11} = z_9$  i  $z_{12} = z_{10}$ . Prokomentarisati dobije vrednosti.



### Rešenje zadatka

U slučaju kada se traktor ide pravolinijski, konusni zupčnici  $z_5$  i  $z_6$  ne rotiraju oko svoje ose već zajedno sa kućištem 8 rotiraju oko ose vratila zupčanika 9 i 11. Zbog toga zupčanici 9 i 11 imaju jednak broj obrtaja time i ugaonu brzinu, te se ugaone brzine točkova dobijaju iz sledeće jednakosti:  $i_{2,12} = i_{2,3} \cdot i_{11,12} = \frac{z_3}{z_2} \cdot \frac{z_{11}}{z_{12}} = \frac{72}{15} \cdot \frac{65}{16} = 19,5$

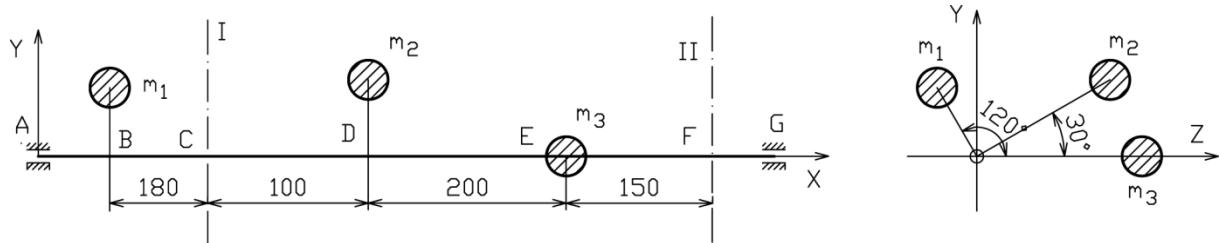
Ugaone brzine računaju se:

$$\omega_{10} = \omega_{12} = \frac{\omega_2}{i_{2,12}} = \frac{50\text{s}^{-1}}{19,5} = 2,56\text{s}^{-1}$$

## 7. Uravnoteženje rotora

### Zadatak 7.1.

Dinamički uravnotežiti mase rotora u dve korekcione ravni I i II. Izmerene neuravnotežene mase su:  $m_1 = 0,5 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,1 \text{ kg}$  i  $m_3 = 0,3 \text{ kg}$ . Prečnici na kojima se nalaze neuravnotežene mase su:  $r_1 = 100 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 250 \text{ mm}$  i  $r_3 = 100 \text{ mm}$ . Položaji neuravnoteženih masu definisani su uglovima položaja (radijus vektori):  $\varphi_1 = 120^\circ$ ,  $\varphi_2 = 30^\circ$  i  $\varphi_3 = 0^\circ$ . Rastojanja L neuravnoteženih masa i korekcionih ravni po osi x dati su na slici. Odrediti korekcione mase  $m_I$  i  $m_{II}$  i njihove položaje čiji su radijusi  $r_I = 200 \text{ mm}$  i  $r_{II} = 75 \text{ mm}$ .



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Uslovi ravnoteže su:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = \vec{0}$$

$$\vec{M}_{iR} = \omega^2 \sum m_i (\vec{L}_i \times \vec{r}_i) = \vec{0}.$$

Da bi ovaj izraz bio jednak nuli, potrebno je da bude ispunjen uslov da je

$$\vec{M}_{iR} = \sum m_i (\vec{L}_i \times \vec{r}_i) = \vec{0}$$

jer nema smisla da je  $\omega = 0$ .

Za zadati primer prvi uslov ravnoteže glasi:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + m_I \cdot \vec{r}_I + m_{II} \cdot \vec{r}_{II} = \vec{0}$$

Članovi iz ove jednačine su vektori u pravcu i smeru radijusa vektora pojedinih masa  $\vec{r}_i$ . Ako se označe sa:  $\vec{U}_1 = m_1 \cdot \vec{r}_1$ ,  $\vec{U}_2 = m_2 \cdot \vec{r}_2$  itd. oblik prethodne jednačine je:

$$\vec{F}_{iR} = \sum \vec{U}_i = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 + \vec{U}_I + \vec{U}_{II} = \vec{0}$$

Intenziteti vektora  $\vec{U}$  su:

$$U_1 = m_1 \cdot r_1 = 0,5 \cdot 100 = 50 \text{ kgmm},$$

$$U_2 = m_2 \cdot r_2 = 0,1 \cdot 250 = 25 \text{ kgmm},$$

$$U_3 = m_3 \cdot r_3 = 0,3 \cdot 100 = 30 \text{ kgmm},$$

$$U_I = m_I \cdot r_I = m_I \cdot 200 \text{ mm},$$

$$U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = m_{II} \cdot 75 \text{ mm}.$$

U jednačini za prvi uslov ravnoteže nepoznate su dve veličine ( $\vec{U}_I$  i  $\vec{U}_{II}$ ) te koristimo drugi uslov ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za bilo koju korekcionu ravan (usvajamo za korekcionu ravan II, tačka F) jednak nuli, te je:

$$\sum \vec{M}_{i(II)} = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{L}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{L}_2) + m_3(\vec{r}_3 \times \vec{L}_3) + m_I(\vec{r}_I \times \vec{L}_I) = 0$$

gde su:  $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots$  (mm) – rastojanja pojedinih neuravnoteženih masa od korekcione ravni II za koju se napisao drugi uslov ravnoteže.

Članovi ove jednačine su vektori koji se rotacijom dovode u pravac radijusa vektora pojedinih neuravnoteženih masa. Mogu se označiti sa:  $\vec{V}_1 = m_1 \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{L}_1)$  i tako redom te prethodna jednačina ima oblik:

$$\sum \vec{M}_{i(II)} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_I = 0$$

Određe se intenziteti vektora  $\vec{V}$ , te je

$$V_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot L_1 = 0,5 \cdot 100 \cdot 630 = 31500 \text{ kg mm}^2,$$

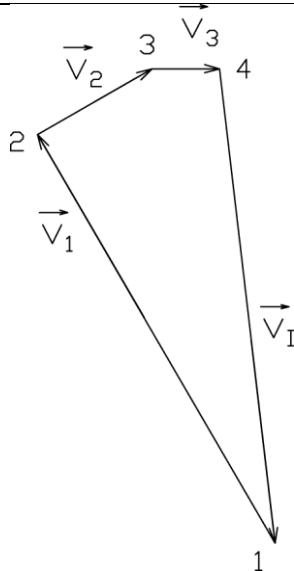
$$V_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot L_2 = 0,1 \cdot 250 \cdot 350 = 8750 \text{ kg mm}^2,$$

$$V_3 = m_3 \cdot r_3 \cdot L_3 = 0,3 \cdot 100 \cdot 150 = 4500 \text{ kg mm}^2,$$

$$V_I = m_I \cdot r_I \cdot L_I = m_I \cdot 200 \cdot 450 = m_I \cdot 90000 \text{ kg mm}^2.$$

Kako u jednačini za drugi uslov ravnoteže imamo samo jednu nepoznatu ( $\vec{V}_I$ ), nacrtamo zatvoreni poligon ovih vektora sa usvojenom razmerom, npr.  $U_V = \frac{10000 \text{ kg mm}^2}{2 \text{ cm}}$ .

Pošto je jednačina za drugi uslov ravnoteže postavljena za korekcionu ravan II (za tačku F,  $\sum \vec{M}_{i(F)}$ ) tada će momenti svih masa imati pozitivan predznak, te se svi vektori  $\vec{V}$  crtaju u smeru radijusa vektora.



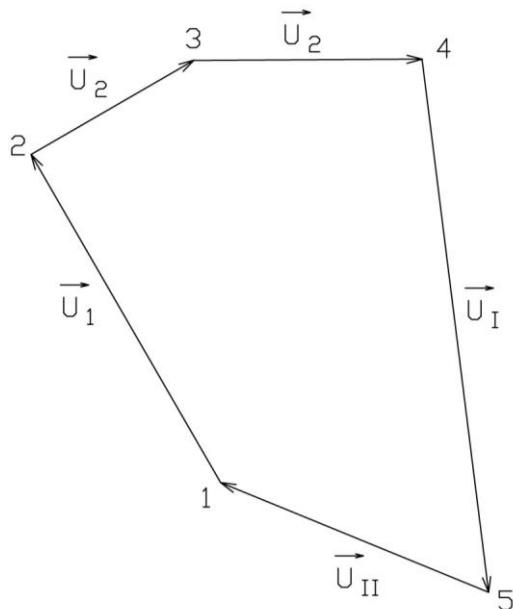
Iz zatvorenog poligona vektora  $\vec{V}$  dobija se da je:

$$V_I = m_I \cdot 90000 \text{ mm}^2 = \overline{41} \cdot U_V = 6,373 \text{ cm} \cdot \frac{10000 \text{ kg mm}^2}{2 \text{ cm}},$$

$V_I = m_I \cdot 90000 \text{ mm}^2 = 31875 \text{ kgmm}^2$ , odakle je

$$m_I = \frac{31875 \text{ kgmm}^2}{90000 \text{ mm}^2} = 0,354 \text{ kg}.$$

Nakon poznate mase  $m_I$  može se odrediti intenzitet vektora  $U_I = m_I \cdot r_I = 0,354 \cdot 200 = 70,8 \text{ kgmm}$  i nacrtati zatvoreni poligon vektora  $\vec{U}$  sa usvojenom razmerom, npr.  $U_U = \frac{10 \text{ kgmm}}{1 \text{ cm}}$ .

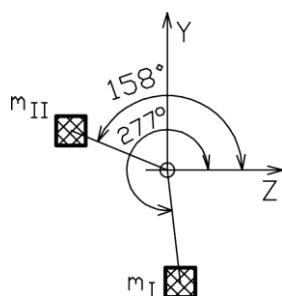


Iz poligona vektora  $\vec{U}$  dobija se da je

$$U_{II} = \overline{ea} \cdot U_U = 3,81 \text{ cm} \cdot \frac{10 \text{ kgmm}}{1 \text{ cm}} = 38,1 \text{ kgmm} = m_{II} \cdot 75 \text{ mm}, \text{ odakle je}$$

$$m_{II} = \frac{38,1 \text{ kgmm}}{75 \text{ mm}} = 0,508 \text{ kg}.$$

Radius vektori korekcionih masa  $m_I$  i  $m_{II}$  su u pravcu i smeru vektora  $\vec{U}$  i  $\vec{V}$  definisani su uglovima  $\varphi_I$  i  $\varphi_{II}$ .

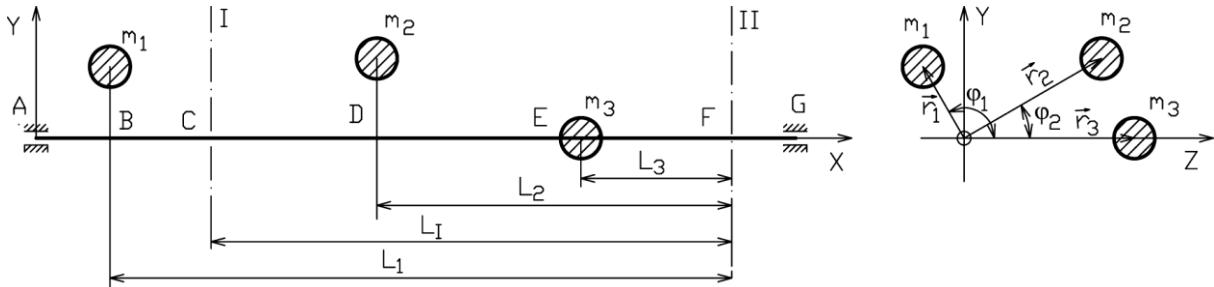


Vrednosti uglova položaja korekcionih masa dobijaju se merenjem i iznose  $\varphi_I = 277^\circ$  i  $\varphi_{II} = 158^\circ$ .

### Rešenje zadatka-Analitička metoda

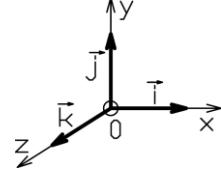
$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \vec{r}_i = 0,$$

$$\vec{M}_{iR} = \omega^2 \sum m_i (\vec{L}_i \times \vec{r}_i) = 0.$$



Iz drugog uslova ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za tačku F korekcionoj ravni II jednak nuli zapisan u obliku matrice, imamo da je:

$$\sum \vec{M}_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \vec{L}_i & 0 & 0 \\ 0 & y_i & z_i \end{vmatrix} = 0,$$



gde je:

$\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  - jedinični vektori (ortovi) po osama x, y i z;

$y_i$ ,  $z_i$  - projekcije radijusa vektora neuravnoteženih masa po osama y i z.

Rešenjem matrice dobija se izraz za rezultujući moment inercijalnih sila za korekcionu ravan II.

$$\sum \vec{M}_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i (\vec{i} \cdot 0 \cdot z_i + L_i \cdot y_i \cdot \vec{k} + \vec{j} \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot 0 \cdot \vec{k} - L_i \cdot z_i \cdot \vec{j} - y_i \cdot 0 \cdot \vec{i}) = 0.$$

Sređivanjem ovog izraza dobija se da je:

$$\sum \vec{M}_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot y_i \cdot \vec{k} - \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot z_i \cdot \vec{j} = 0$$

Kako nema smisla da je  $\omega = 0$ , sledi da je:

$$\sum m_i \cdot L_i \cdot y_i = 0 \text{ i } \sum m_i \cdot L_i \cdot z_i = 0$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3 = 0,$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3 = 0.$$

Iz prethodnih izraza dobija se

$$m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 = -m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot y_3,$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 = -m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot z_3.$$

Komponente radijusa vektora pojedinih masa po osama y i z prema postavci zadatka su:

$$y_1 = r_1 \cdot \sin 120^\circ = 100 \cdot 0,866 = 86,6 \text{ mm},$$

$$y_2 = r_2 \cdot \sin 30^\circ = 250 \cdot 0,5 = 125 \text{ mm},$$

$$y_3 = r_3 \cdot \sin \varphi_3 = 100 \cdot \sin 0 = 0 \text{ mm},$$

$$z_1 = r_1 \cdot \cos 120^\circ = 100 \cdot (-0,5) = -50 \text{ mm},$$

$$z_2 = r_2 \cdot \cos 30^\circ = 250 \cdot 0,866 = 216,5 \text{ mm},$$

$$z_3 = r_3 \cdot \cos \varphi_3 = 100 \cdot \cos 0 = 100 \text{ mm},$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 = 0,5 \cdot 630 \cdot 86,6 = 27279 \text{ kgmm}^2,$$

$$m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 = 0,1 \cdot 350 \cdot 125 = 4375 \text{ kgmm}^2,$$

$$m_3 \cdot L_3 \cdot y_3 = 0,3 \cdot 150 \cdot 0 = 0 \text{ kgmm}^2,$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 = 0,5 \cdot 630 \cdot (-50) = -15750 \text{ kgmm}^2,$$

$$m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 = 0,1 \cdot 350 \cdot 216,5 = 7577 \text{ kgmm}^2,$$

$$m_3 \cdot L_3 \cdot z_3 = 0,3 \cdot 150 \cdot 100 = 4500 \text{ kgmm}^2.$$

Ugao položaga radijus vektora korekcione mase I je

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{Y_{RI}}{Z_{RI}} = \frac{m_I \cdot L_I \cdot y_I}{m_I \cdot L_I \cdot z_I} = \frac{-m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot y_3}{-m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot z_3},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{-27279 - 4375 - 0}{-(-15750) - 7577 - 4500} = \frac{-31654}{3673} = -8,618, \text{ odakle je ugao}$$

$$\varphi_I = \arctg -8,618 = -83,38^\circ \text{ ili računato prema smeru matematičkog ugla}$$

$$\varphi_I = 360^\circ - 83,38^\circ = 276,62^\circ.$$

Korekciona masa  $m_I$  dobija se iz prethodne jednačine gde je:

$$m_I = \frac{-m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot y_3}{L_I \cdot y_I} = \frac{31654}{450 \cdot (-198,666)} = 0,354 \text{ kg},$$

$$\text{jer je } y_I = r_I \cdot \sin \varphi_I = 200 \cdot \sin 276,62 = 200 \cdot (-0,99333) = -198,666 \text{ mm.}$$

Skalarni oblik prvog uslova ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli ( $\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = 0$ ) je:

$$Y_{iR} = \sum m_i \cdot y_i = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + m_I \cdot y_I + m_{II} \cdot y_{II} = 0,$$

$$Z_{iR} = \sum m_i \cdot z_i = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + m_I \cdot z_I + m_{II} \cdot z_{II} = 0,$$

odakle je:

$$m_{II} \cdot y_{II} = -m_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot y_3 - m_I \cdot y_I,$$

$$m_{II} \cdot z_{II} = -m_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot z_3 - m_I \cdot z_I.$$

Sada se mogu odrediti intenziteti radijus vektora korekcione mase I

$$y_I = r_I \cdot \sin \varphi_I = 200 \cdot \sin 276,62^\circ = 200 \cdot (-0,9933) = -198,66 \text{ mm},$$

$$z_I = r_I \cdot \cos \varphi_I = 200 \cdot \cos 276,62^\circ = 200 \cdot 0,1152 = 23,056 \text{ mm.}$$

Iz prethodnih izraza dobija se ugao radijus vektora korekcione mase II

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{Y_{RII}}{Z_{RII}} = \frac{m_{II} \cdot y_{II}}{m_{II} \cdot z_{II}} = \frac{-m_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot y_3 - m_I \cdot y_I}{-m_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot z_3 - m_I \cdot z_I} =$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{-0,5 \cdot 86,6 - 0,1 \cdot 125 - 0,3 \cdot 0 - 0,354 \cdot (-198,66)}{-0,5 \cdot (-50) - 0,1 \cdot 216,5 - 0,3 \cdot 100 - 0,354 \cdot 23,056} =$$

$$= \frac{-43,3 - 12,5 - 0 + 70,325}{25 - 21,65 - 30 - 8,161} = \frac{14,525}{-34,811} = -0,417$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = -0,417, \text{ odakle je ugao } \varphi_{II} = \arctg -0,417 = 22,64^\circ \text{ tj.}$$

$$\varphi_{II} = 180^\circ - 22,64^\circ = 157,35^\circ.$$

Iz jednačine  $m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + m_I \cdot y_I + m_{II} \cdot y_{II} = 0$ , dobija se:

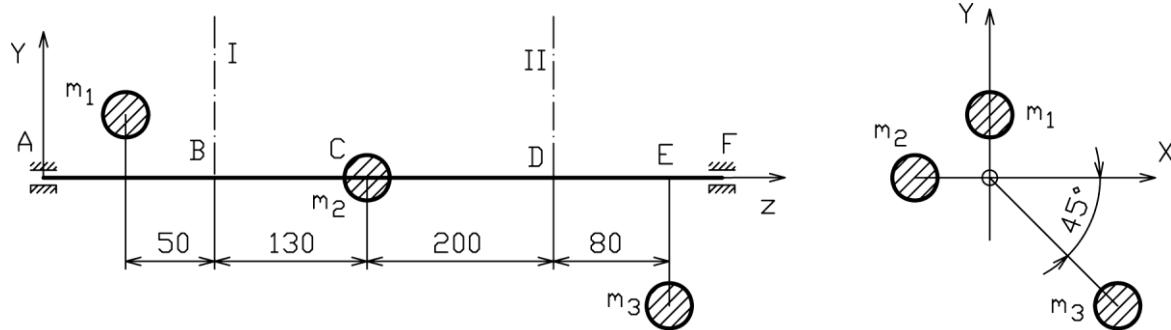
$$\begin{aligned} m_{II} &= \frac{-m_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot y_3 - m_I \cdot y_I}{y_{II}} = \\ &= \frac{-0,5 \cdot 86,6 - 0,1 \cdot 125 - 0,3 \cdot 0 - 0,354 \cdot (-198,666)}{28,88} = \\ m_{II} &= \frac{-43,3 - 12,5 - 0 + 70,327}{28,88} = \frac{14,527}{28,88} = 0,503 \text{ kg}, \end{aligned}$$

jer je  $y_{II} = r_{II} \cdot \sin \varphi_{II} = 75 \cdot \sin 157,35^\circ = 75 \cdot 0,3851 = 28,88 \text{ mm}$ .

Vrednosti traženih parametara  $m_I$ ,  $m_{II}$ ,  $\varphi_I$ ,  $\varphi_{II}$  treba da su iste dobijene na osnovu obe metode što je u ovom primeru pokazano.

### Zadatak 7.2.

Dinamički uravnotežiti neuravnotežene mase rotora u dve korekcione ravni I i II. Neuravnotežene mase su:  $m_1 = 0,1 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,3 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 0,25 \text{ kg}$ . Korekcione mase su  $m_I = 0,15 \text{ kg}$  i  $m_{II} = 0,55 \text{ kg}$ . Prečnici na kojima se nalaze neuravnotežene mase su  $r_1 = 60 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 80 \text{ mm}$  i  $r_3 = 95 \text{ mm}$ . Odrediti poluprečnike korekcionih masa  $r_I$  i  $r_{II}$ .



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Statički uslovi ravnoteže su:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{iR} &= \sum m_i \cdot \vec{r}_i = 0 \\ \vec{M}_{iR} &= \sum m_i (\vec{L}_i \times \vec{r}_i) = 0 \end{aligned}$$

Na osnovu prve jednačina ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli dobija se:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + m_I \cdot \vec{r}_I + m_{II} \cdot \vec{r}_{II} = 0$$

Ako se članovi iz prethodne jednačine označe sa  $\vec{U}_1 = m_1 \cdot \vec{r}_1$ ,  $\vec{U}_2 = m_2 \cdot \vec{r}_2$  itd. oblik jednačine je:

$$\vec{F}_{iR} = \sum \vec{U}_i = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 + \vec{U}_I + \vec{U}_{II} = 0$$

Intenziteti vektora  $\vec{U}$  su:

$$U_1 = m_1 \cdot r_1 = 0,1 \cdot 60 = 6 \text{ kgmm}$$

$$U_2 = m_2 \cdot r_2 = 0,3 \cdot 80 = 24 \text{ kgmm}$$

$$U_3 = m_3 \cdot r_3 = 0,25 \cdot 95 = 23,75 \text{ kgmm}$$

$$U_I = m_I \cdot r_I = 0,15 \cdot r_I \text{ kgmm}$$

$$U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = 0,55 \cdot r_{II} \text{ kgmm}$$

Drugi uslov ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za bilo koju tačku (usvajamo za ravan I, tačka B) jednak nuli, te je:

$$\sum \vec{M}_{i(I)} = m_1(\vec{r}_1 \times \vec{L}_1) + m_2(\vec{r}_2 \times \vec{L}_2) + m_3(\vec{r}_3 \times \vec{L}_3) + m_{II}(\vec{r}_{II} \times \vec{L}_{II}) = 0$$

gde su:  $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots$  (mm) – rastojanja pojedinih neuravnoteženih masa od korekcione ravni I za koju se koristio drugi uslov ravnoteže.

Članovi ove jednačine su vektori koji se rotacijom dovode u pravac radijus vektora pojedinih neuravnoteženih masa. Mogu se označiti sa:  $\vec{V}_1 = m_1 \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{L}_1)$  i tako redom te prethodna jednačina ima oblik:

$$\sum \vec{M}_{i(I)} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_{II} = 0$$

Odrede se intenziteti vektora  $\vec{V}$ , te je

$$V_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot L_1 = 0,1 \cdot 60 \cdot 50 = 300 \text{ kgmm}^2,$$

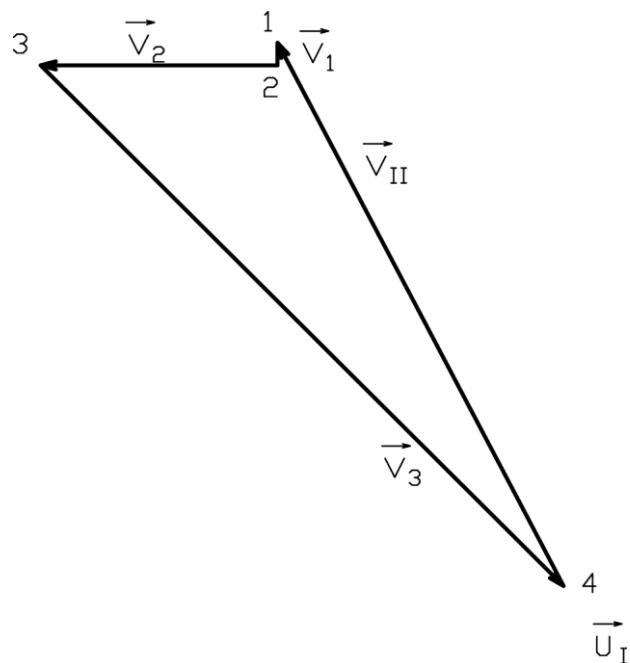
$$V_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot L_2 = 0,3 \cdot 80 \cdot 130 = 3120 \text{ kgmm}^2,$$

$$V_3 = m_3 \cdot r_3 \cdot L_3 = 0,25 \cdot 95 \cdot 410 = 9737 \text{ kgmm}^2$$

$$V_{II} = m_{II} \cdot r_{II} \cdot L_{II} = 0,55 \cdot r_{II} \cdot 330.$$

Nacrtamo zatvoreni poligon ovih vektora sa usvojenom razmerom  $U_V = \frac{1000 \text{ kgmm}^2}{10 \text{ mm}}$ .

Pošto je jednačina za drugi uslov ravnoteže postavljena za korekcionu ravan I (za tačku B,  $\sum \vec{M}_{i(I)}$ ) tada će moment masa sa leve strane od korekcione ravni I biti sa negativnim predznakom, a sa desne sa pozitivnim ili obrnuto. Vektori  $\vec{V}$  sa pozitivnim predznakom crtaju se u smeru radijus vektora te mase, a sa negativnim u suprotnom smeru od radijus vektora te mase. U ovom primeru usvojeno je da momenti masa sa leve strane od korekcione ravni I budu sa negativnim predznakom, te se vektor  $\vec{V}_1$  mase  $m_1$  crta u suprotnom smeru radijus vektora  $\vec{r}_1$ , a ostali vektori  $\vec{V}_2$  i  $\vec{V}_3$  su pozitivnog smera te se crtaju u pravcu njihovih radijus vektora.



Iz zatvorenog poligona vektora  $\vec{V}$  dobija se da je:

$$V_{II} = m_{II} \cdot r_{II} \cdot L_{II} = 0,55 \text{ kg} \cdot r_{II} \cdot 330 \text{ mm} = \overline{41} \cdot U_V = 81,11 \text{ mm} \cdot \frac{1000 \text{ kgmm}^2}{10 \text{ mm}}$$

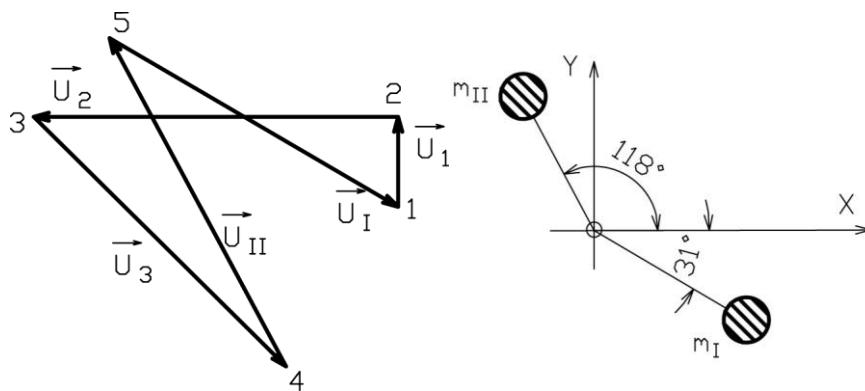
$$\text{odakle je } r_{II} = \frac{81110}{0,55 \cdot 330 \cdot 10} = 44,68 \text{ mm}.$$

Nakon poznatog radijusa  $r_{II}$  može se odrediti intenzitet vektora  $U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = 0,55 \cdot 45 = 24,75 \text{ kgmm}$  i nacrtati zatvoreni poligon vektora  $\vec{U}$  sa usvojenom razmerom  $U_U = \frac{10 \text{ kgmm}}{20 \text{ mm}}$ . Iz poligona vektora  $\vec{U}$  dobija se da je

$$U_I = 0,15 \cdot r_I = \overline{51} \cdot U_U = 44,15 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ kgmm}}{20 \text{ mm}} = 22,07 \text{ kgmm},$$

$$\text{odakle je } r_I = \frac{22,07 \text{ kgmm}}{0,15 \text{ kg}} = 147,17 \text{ mm}.$$

Vrednosti uglova položaja korekcionih masa dobijaju se merenjem i iznose  $\varphi_I = 329^\circ$  i  $\varphi_{II} = 118^\circ$ .



### Rešenje zadatka-Analitička metoda

Iz drugog uslova ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za tačku D jednak nuli zapisano u matričnom obliku imamo da je:

$$\sum M_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L_i & 0 & 0 \\ 0 & y_i & z_i \end{vmatrix} = 0$$

gde su:  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  i  $\vec{k}$  - jedinični vektori po osama x, y i z. Iz prethodne jednačine imamo da je:

$$\sum \vec{M}_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot y_i \cdot \vec{k} - \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot z_i \cdot \vec{j} = 0$$

Kako nema smisla da je  $\omega \neq 0$ , sledi da je  $\sum m_i \cdot L_i \cdot y_i = 0$  i  $\sum m_i \cdot L_i \cdot z_i = 0$ , a u razvijenom obliku je:

$$m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_I \cdot L_I \cdot y_I + m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot y_3 = 0$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_I \cdot L_I \cdot z_I + m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot z_3 = 0$$

Projekcije radijus vektora masa po osama "y<sub>i</sub>" i "z<sub>i</sub>" su:

$$y_1 = r_I \cdot \sin 90^\circ = 60 \text{ mm} \cdot 1 = 60 \text{ mm},$$

$$y_2 = r_2 \cdot \sin 180^\circ = 80 \text{ mm} \cdot 0 = 0 \text{ mm},$$

$$y_3 = r_3 \cdot \sin 315^\circ = 95 \text{ mm} \cdot (-0,707) = -67,165 \text{ mm},$$

$$z_1 = r_I \cdot \cos 90^\circ = 60 \cdot 0 = 0 \text{ mm},$$

$$z_2 = r_2 \cdot \cos 180^\circ = 80 \text{ mm} \cdot (-1) = -80 \text{ mm},$$

$$z_3 = r_3 \cdot \cos 315^\circ = 95 \text{ mm} \cdot 0,707 = 67,165 \text{ mm}.$$

Ugao radijus vektora korekcione mase I je

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{Y_I}{Z_I} = \frac{m_I \cdot L_I \cdot y_I}{m_I \cdot L_I \cdot z_I} = \frac{-m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3}{-m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3},$$

jer je iz  $m_I \cdot L_I \cdot y_I = -m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3$  i

$$m_I \cdot L_I \cdot z_I = -m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3.$$

Sledi da je

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{-0,1 \cdot 380 \cdot 60 - 0,3 \cdot 200 \cdot 0 + 0,25 \cdot 80 \cdot (-67,165)}{-0,1 \cdot 380 \cdot 0 - 0,3 \cdot 200 \cdot (-80) + 0,25 \cdot 80 \cdot (67,165)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{-2280 - 0 - 1343,3}{0 + 4800 + 1343,3} = \frac{-3623,3}{6143,3} = -0,5898,$$

odakle je  $\varphi_I = -30,53^\circ \Rightarrow \varphi_I = 360^\circ - 30,53^\circ = 329,47^\circ$ .

Pošto je

$$m_I \cdot L_I \cdot y_I = -3623,3 \Rightarrow y_I = \frac{-3623,3 \text{ kgmm}^2}{0,15 \text{ kg} \cdot 330 \text{ mm}} = -73,19 \text{ mm},$$

$$y_I = r_I \cdot \sin \varphi_I \Rightarrow r_I = \frac{-73,19 \text{ mm}}{\sin 329,74^\circ} = 146,38 \text{ mm},$$

$$z_I = r_I \cdot \cos \varphi_I = 146,38 \text{ mm} \cdot \cos 329,74^\circ = 126,08 \text{ mm}.$$

Skalarni oblik prvog uslova ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli  $\sum F_{iR} = \sum m_i \cdot r_i = 0$  je:

$$Y_{iR} = \sum m_i \cdot y_i = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + m_I \cdot y_I + m_{II} \cdot y_{II} = 0,$$

$$Z_{iR} = \sum m_i \cdot z_i = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + m_I \cdot z_I + m_{II} \cdot z_{II} = 0.$$

Ugao radijus vektora korekcione mase II je

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{Y_{II}}{Z_{II}} = \frac{m_{II} \cdot y_{II}}{m_{II} \cdot z_{II}}.$$

Iz prethodnih jednačina imamo da je:

$$\begin{aligned} m_{II} \cdot y_{II} &= -m_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot y_3 - m_I \cdot y_I = \\ &= -0,1 \cdot 60 - 0,3 \cdot 0 - 0,25 \cdot (-67,165) - 0,15 \cdot (-73,19) = 21,75 \text{ kgmm}. \end{aligned}$$

Iz jednačine za zbir inercijalnih sila po osama imamo da je:

$$\begin{aligned} m_{II} \cdot z_{II} &= -m_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot z_3 - m_I \cdot z_I = \\ &= -0,1 \cdot 0 - 0,3 \cdot (-80) - 0,25 \cdot (67,165) - 0,15 \cdot (126,08) = -11,68. \end{aligned}$$

Sledi da je:

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{Y_{II}}{Z_{II}} = \frac{m_{II} \cdot y_{II}}{m_{II} \cdot z_{II}} = \frac{21,75}{-11,68} = -1,86, \text{ odakle je } \varphi_{II} = -61,76^\circ.$$

Ukupna vrednost ugla  $\varphi_{II}$  prema predznacima  $Y_{II}$  i  $Z_{II}$  je  $\varphi_{II} = 180 - 61,76 = 118,24^\circ$

Radijus vektora mase  $m_{II}$  po osama "y<sub>II</sub>" i "z<sub>II</sub>" su

$$y_{II} = \frac{21,75 \text{ kgmm}}{0,55 \text{ kg}} = 39,54 \text{ mm}$$

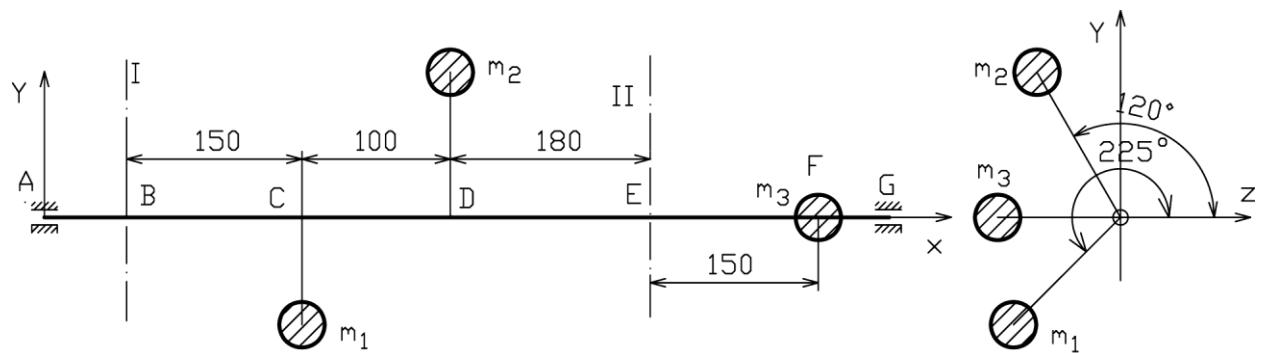
$$y_{II} = r_{II} \cdot \sin \varphi_{II}.$$

Sledi da je

$$r_{II} = \frac{39,54 \text{ kgmm}}{\sin 118,24^\circ} = 44,93 \text{ kg}$$

### Zadatak 7.3.

Dinamički uravnotežiti mase rotora u dve korekcione ravni I i II. Neuravnotežene mase su:  $m_1 = 0,2 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,3 \text{ kg}$  i  $m_3 = 0,5 \text{ kg}$ . Radijusi na kojima se nalaze neuravnotežene mase su:  $r_1 = 100 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 200 \text{ mm}$  i  $r_3 = 75 \text{ mm}$ . Radijus mase  $m_1$  kojom se uravnotežuje rotor je  $r_1 = 80 \text{ mm}$ . Korekciona masa u ravni II je  $m_{II} = 1,5 \text{ kg}$ . Odrediti korekcionu masu  $m_I$  i radijus  $r_{II}$ . Koristiti grafoanalitičku ili analitičku metodu.



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Uslovi ravnoteže su:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{M}_{iR} = \sum m_i (\vec{L}_i \times \vec{r}_i) = 0$$

Razvijeni oblik prvog uslova ravnoteže je:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + m_I \cdot \vec{r}_I + m_{II} \cdot \vec{r}_{II} = 0$$

Članovi iz ove jednačine su vektori u pravcu i smeru radijus vektora pojedinih masa. Ako se označe sa:  $\vec{U}_1 = m_1 \cdot \vec{r}_1$ ,  $\vec{U}_2 = m_2 \cdot \vec{r}_2$  itd. oblik prve jednačine je:

$$\vec{F}_{iR} = \sum \vec{U}_i = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 + \vec{U}_I + \vec{U}_{II} = 0$$

Intenziteti vektora U su:

$$U_1 = m_1 \cdot r_1 = 0,2 \cdot 100 = 20 \text{ kgmm}$$

$$U_2 = m_2 \cdot r_2 = 0,3 \cdot 200 = 60 \text{ kgmm}$$

$$U_3 = m_3 \cdot r_3 = 0,5 \cdot 75 = 37,5 \text{ kgmm}$$

$$U_I = m_I \cdot r_I = m_I \cdot 80 \text{ mm}$$

$$U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = 1,5 \text{ kg} \cdot r_{II}$$

U ovoj jednačini nepoznate su dve veličine ( $\vec{U}_I$  i  $\vec{U}_{II}$ ) te koristimo drugi uslov ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za bilo koju tačku (usvajamo za tačku B, tj. korekcionu ravan I) jednak nuli, te je:

$$\sum \vec{M}_{i(B)} = m_1 (\vec{L}_1 \times \vec{r}_1) + m_2 (\vec{L}_2 \times \vec{r}_2) + m_3 (\vec{L}_3 \times \vec{r}_3) + m_{II} (\vec{L}_{II} \times \vec{r}_{II}) = 0$$

Članovi ove jednačine su vektori koji se rotacijom dovode u pravac radijus vektora pojedinih neuravnoteženih masa. Mogu se označiti sa:  $\vec{V}_1 = m_1 (\vec{L}_1 \times \vec{r}_1)$  i tako redom te prethodna jednačina ima oblik:

$$\sum \vec{M}_{i(I)} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_{II} = 0$$

Odrede se intenziteti vektora  $\vec{V}$ , te je

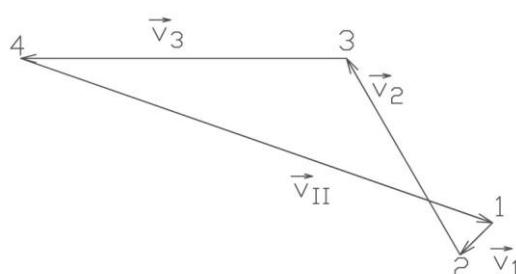
$$V_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot L_1 = 0,2 \cdot 100 \cdot 150 = 3000 \text{ kgmm}^2,$$

$$V_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot L_2 = 0,3 \cdot 200 \cdot 250 = 15000 \text{ kgmm}^2,$$

$$V_3 = m_3 \cdot r_3 \cdot L_3 = 0,5 \cdot 75 \cdot 580 = 21750 \text{ kgmm}^2,$$

$$V_{II} = m_{II} \cdot r_{II} \cdot L_{II} = 1,5 \text{ kg} \cdot r_{II} \cdot 430 \text{ mm}.$$

Kako u ovoj jednačini ima samo jedna nepoznata veličina ( $\vec{V}_{II}$ ) nacrtamo zatvoreni poligon ovih vektora sa usvojenom razmerom  $U_V = \frac{10000 \text{ kgmm}^2}{20 \text{ mm}}$ .



Iz zatvorenog poligona vektora  $\vec{V}$  dobija se da je:

$$V_{II} = m_{II} \cdot r_{II} \cdot L_{II} = 1,5 \text{ kg} \cdot r_{II} \cdot 430 \text{ mm} = \overline{41} \cdot U_V = 66 \text{ mm} \cdot \frac{10000 \text{ kgmm}^2}{20 \text{ mm}}$$

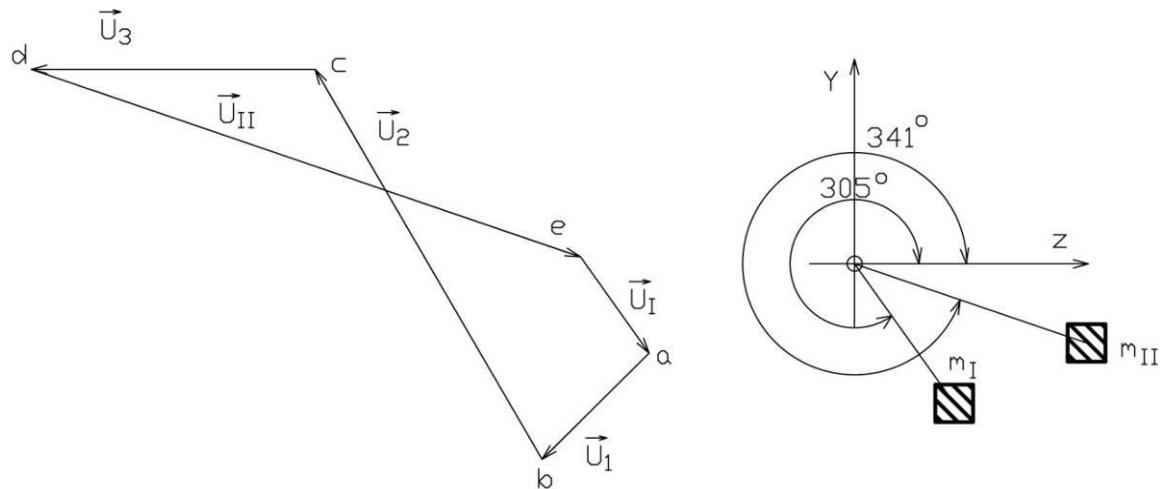
$$\text{odakle je } r_{II} = \frac{66 \text{ mm} \cdot \frac{10000 \text{ kg}}{20 \text{ mm}}}{1,5 \text{ kg} \cdot 430 \text{ mm}} = 51,16 \text{ mm}$$

Nakon poznatog korekcionog radijusa vektora  $r_{II}$  može se odrediti intenzitet vektora  $U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = 1,5 \text{ kg} \cdot 51,16 \text{ mm} = 76,74 \text{ kgmm}$  i nacrtati zatvoreni poligon vektora  $\vec{U}$  sa usvojenom razmerom  $U_U = \frac{10 \text{ kgmm}}{10 \text{ mm}}$ .

Iz poligona vektora  $\vec{U}$  dobija se da je  $U_I = \overline{ea} \cdot U_U = 15,72 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ kgmm}}{10 \text{ mm}} = m_I \cdot 80 \text{ mm}$ ,

$$\text{odakle je } m_I = \frac{15,72 \text{ kgmm}}{80 \text{ mm}} = 0,196 \text{ kg}.$$

Vrednosti uglova položaja korekcionih masa dobijaju se merenjem i iznose  $\varphi_I = 305^\circ$  i  $\varphi_{II} = 341^\circ$ .



#### Rešenje zadatka-Analitička metoda

Iz drugog uslova ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za tačku E na korekcionoj ravni II jednak nuli imamo da je:

$$\sum M_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L_i & 0 & 0 \\ 0 & y_i & z_i \end{vmatrix}$$

gde su:  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ - jedinični vektori po osama x, y i z

$$\sum M_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot k - \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot z_i \cdot j = 0$$

$$\sum M_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot y_i \cdot k - \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot z_i \cdot j = 0$$

Kako nema smisla da je  $\omega_3 \neq 0$ , sledi da je  $\sum m_i \cdot L_i \cdot y_i = 0$  i  $\sum m_i \cdot L_i \cdot z_i = 0$ , a u razvijenom obliku je:

$$m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II} + m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3 = 0,$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_{II} \cdot L_{II} \cdot z_{II} + m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3 = 0.$$

Projekcije radijus vektora masa po osama "y<sub>i</sub>" i "z<sub>i</sub>" su:

$$y_1 = r_1 \cdot \sin 225^\circ = 100 \text{ mm} \cdot (-0,707) = -70,71 \text{ mm},$$

$$y_2 = r_2 \cdot \sin 120^\circ = 200 \text{ mm} \cdot 0,866 = 173,2 \text{ mm},$$

$$y_3 = r_3 \cdot \sin 180^\circ = 75 \text{ mm} \cdot 0 = 0 \text{ mm},$$

$$z_1 = r_1 \cdot \cos 225^\circ = 100 \cdot (-0,707) = -70,71 \text{ mm},$$

$$z_2 = r_2 \cdot \cos 120^\circ = 200 \text{ mm} \cdot (-0,5) = -100 \text{ mm},$$

$$z_3 = r_3 \cdot \cos 180^\circ = 75 \text{ mm} \cdot (-1) = -75 \text{ mm}.$$

Ugao radijus vektora korekcione mase I:

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{Y_{II}}{Z_{II}} = \frac{m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II}}{m_1 \cdot L_1 \cdot z_1} = \frac{-m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot y_3}{-m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot z_3},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{-0,2 \cdot 150 \cdot (-70,71) - 0,3 \cdot 250 \cdot 173,2 - 0,5 \cdot 580 \cdot 0}{-0,2 \cdot 150 \cdot (-70,71) - 0,3 \cdot 250 \cdot (-100) - 0,5 \cdot 580 \cdot (-75)},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{3959,76 - 9352,8 - 0}{3959,76 + 5400 - 5625} = \frac{-10868,7}{31371,3} = -0,346,$$

odakle je  $\varphi_{II} = -19,08^\circ \Rightarrow \varphi_I = 360^\circ - 19,08^\circ = 340,92^\circ$

Sledi da je

$$m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II} = -10868,7 \text{ kgmm}^2,$$

$1,5 \text{ kg} \cdot 430 \text{ mm} \cdot r_{II} \sin 340,92^\circ = -10868,7 \text{ kgmm}^2$ , odakle je

$$r_{II} = \frac{-10868,7 \text{ kgmm}^2}{1,5 \text{ kg} \cdot 430 \text{ mm} \cdot (-0,33)} = 51,06 \text{ mm},$$

$$y_{II} = r_{II} \cdot \sin 340,92^\circ = 51,06 \text{ mm} \cdot (-0,33) = -16,85 \text{ mm},$$

$$z_{II} = r_{II} \cdot \cos 340,92^\circ = 51,06 \text{ mm} \cdot 0,945 = 48,25 \text{ mm}.$$

Skalarni oblik prvog uslova ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli

( $\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = 0$ ) je:

$$Y_{iR} = \sum m_i \cdot y_i = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + m_I \cdot y_I + m_{II} \cdot y_{II} = 0,$$

$$Z_{iR} = \sum m_i \cdot z_i = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + m_I \cdot z_I + m_{II} \cdot z_{II} = 0.$$

Ugao radijus vektora korekcione mase I:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{Y_I}{Z_I} = \frac{m_I \cdot y_I}{m_I \cdot z_I}$$

Iz jednačine imamo da je:

$$m_I \cdot y_I = -m_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot y_3 - m_{II} \cdot y_{II} = \\ -0,2 \cdot (-70,71) - 0,3 \cdot 173,2 - 0,5 \cdot 0 - 1,5 \cdot (-16,85) = -12,543 \text{ kgmm}$$

Iz jednačine imamo da je:

$$m_I \cdot z_I = -m_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot z_3 - m_{II} \cdot z_{II} = \\ -0,2 \cdot (-70,71) - 0,3 \cdot (-100) - 0,5 \cdot (-75) - 1,5 \cdot 48,25 = 9,267 \text{ kgmm}$$

Iz jednačine sledi da je:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{Y_I}{Z_I} = \frac{m_I \cdot y_I}{m_I \cdot z_I} = \frac{-12,543}{9,267} = -1,35, \text{ odakle je}$$

$\varphi_I = -53,47^\circ$ . Ukupna vrednost ugla  $\varphi_I$  prema predznacima  $Y_I$  i  $Z_I$  je  
 $\varphi_I = 360 - 53,47 = 306,53^\circ$ .

Radijus vektora mase  $m_{II}$  po osama "y<sub>II</sub>" i "z<sub>II</sub>" su

$$y_{II} = r_{II} \cdot \sin \varphi_{II} = 80 \cdot \sin 306,53^\circ = 80 \cdot (-0,803) = -64,28 \text{ mm}$$

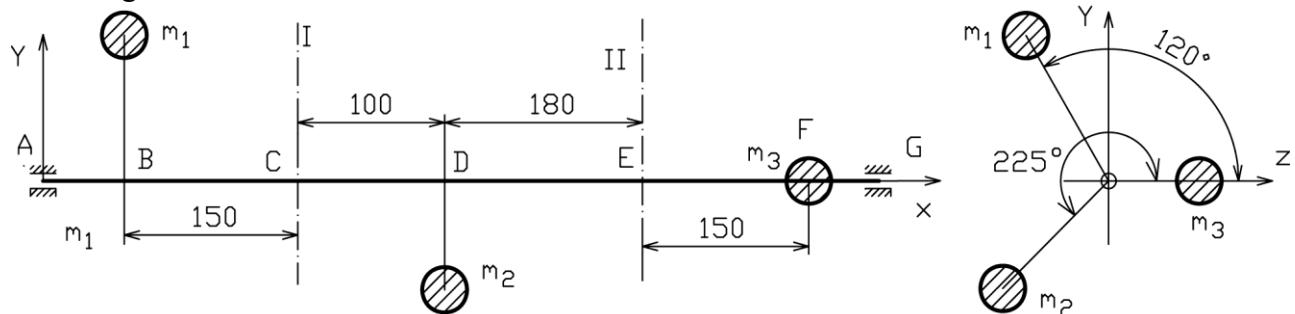
$$z_{II} = r_{II} \cdot \cos \varphi_{II} = 80 \cdot \cos 306,53^\circ = 80 \cdot 0,595 = 47,62 \text{ mm}$$

Iz jednačina sledi da je  $m_{II} \cdot z_{II} = 9,267 \text{ kgmm}$ , odakle je

$$m_I = \frac{9,267 \text{ kgmm}}{47,62 \text{ mm}} = 0,195 \text{ kg}$$

#### Zadatak 7.4.

Dinamički uravnotežiti mase rotora u dve korekcione ravni I i II. Neuravnotežene mase su:  $m_1 = 0,12 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,4 \text{ kg}$  i  $m_3 = 0,6 \text{ kg}$ . Radijusi na kojima se nalaze neuravnotežene mase su:  $r_1 = 80 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 120 \text{ mm}$  i  $r_3 = 55 \text{ mm}$ . Radijusi masa kojima se uravnotežuje rotor je  $r_I = r_{II} = 110 \text{ mm}$ . Odrediti korekcione mase  $m_I$  i  $m_{II}$  i njihove položaje. Koristiti grafoanalitičku i analitičku metodu.



#### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Na osnovu prve jednačine ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + m_I \cdot \vec{r}_I + m_{II} \cdot \vec{r}_{II}, \text{ može se označiti sa}$$

$$\vec{U}_1 = m_1 \cdot \vec{r}_1, \quad \vec{U}_2 = m_2 \cdot \vec{r}_2 \text{ itd. Gde je oblik jednačine}$$

$$\vec{F}_{iR} = \sum \vec{U}_i = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 + \vec{U}_I + \vec{U}_{II} = \vec{0}.$$

Intenziteti vektora U su:

$$U_1 = m_1 \cdot r_1 = 0,12 \cdot 80 = 9,6 \text{ kgmm},$$

$$U_2 = m_2 \cdot r_2 = 0,4 \cdot 120 = 48 \text{ kgmm},$$

$$U_3 = m_3 \cdot r_3 = 0,6 \cdot 55 = 33 \text{ kgmm},$$

$$U_I = m_I \cdot r_I = m_I \cdot 110 \text{ mm},$$

$$U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} \text{ mm.}$$

Nepoznate su dve veličine ( $\vec{U}_I$  i  $\vec{U}_{II}$ ) te koristimo drugi uslov ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za bilo koju tačku (tačku C na ravni I) jednak nuli, te je:

$$\sum \vec{M}_{i(I)} = m_1(\vec{L}_1 \times \vec{r}_1) + m_2(\vec{L}_2 \times \vec{r}_2) + m_3(\vec{L}_3 \times \vec{r}_3) + m_I(\vec{L}_I \times \vec{r}_I) = 0$$

Članovi ove jednačine su vektori koji se rotacijom dovode u pravac radijus vektora pojedinih neuravnoteženih masa.

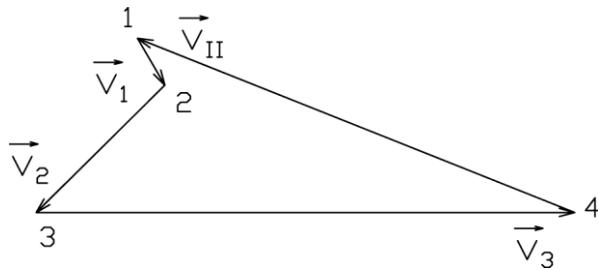
$$\sum \vec{M}_{i(I)} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_{II} = 0$$

Odrede se intenziteti vektora  $\vec{V}$ , te je

$$\begin{aligned} V_1 &= m_1 \cdot r_1 \cdot L_1 = 0,12 \cdot 80 \cdot 150 = 1440 \text{ kgmm}^2, \\ V_2 &= m_2 \cdot r_2 \cdot L_2 = 0,4 \cdot 120 \cdot 100 = 4800 \text{ kgmm}^2, \\ V_3 &= m_3 \cdot r_3 \cdot L_3 = 0,6 \cdot 55 \cdot 430 = 14190 \text{ kgmm}^2, \\ V_{II} &= m_{II} \cdot r_{II} \cdot L_{II} = m_{II} \cdot 110 \cdot 280 = m_{II} \cdot 30800 \text{ mm}^2. \end{aligned}$$

Kako u jednačini ima samo jedna nepoznata veličina ( $\vec{V}_{II}$ ) nacrtamo zatvoreni poligon ovih vektora sa usvojenom razmerom  $U_V = \frac{1000 \text{ kgmm}^2}{5 \text{ mm}}$ .

Pošto je jednačina za drugi uslov ravnoteže postavljena za korekcionu ravan I (za tačku C,  $\sum M_{i(C)}$ ) tada će moment inercijalnih sila sa leve strane od korekcione ravni I biti sa negativnim predznakom, a sa desne sa pozitivnim ili obrnuto. Vektori  $\vec{V}$  sa pozitivnim predznakom crtaju se u smeru radijusa vektora te mase, a sa negativnim u suprotnom smeru od radijusa vektora te mase. U ovom primeru usvojeno je da momenti inercijalnih sila sa leve strane od korekcione ravni I sa negativnim predznakom, te se vektor  $\vec{V}_1$  crta u suprotnom smeru radijusa vektora  $\vec{r}_1$ , a ostali vektori  $\vec{V}_2$  i  $\vec{V}_3$  su pozitivnog smera te se crtaju u pravcu njihovih radijusa vektora.



Iz zatvorenog poligona vektora  $\vec{V}$  dobija se da je:

$$V_{II} = m_{II} \cdot 30800 \text{ mm}^2 = \bar{41} \cdot U_V = 62 \text{ mm} \cdot \frac{1000 \text{ kgmm}^2}{5 \text{ mm}} = 12400 \text{ kgmm}^2, \text{ odakle je}$$

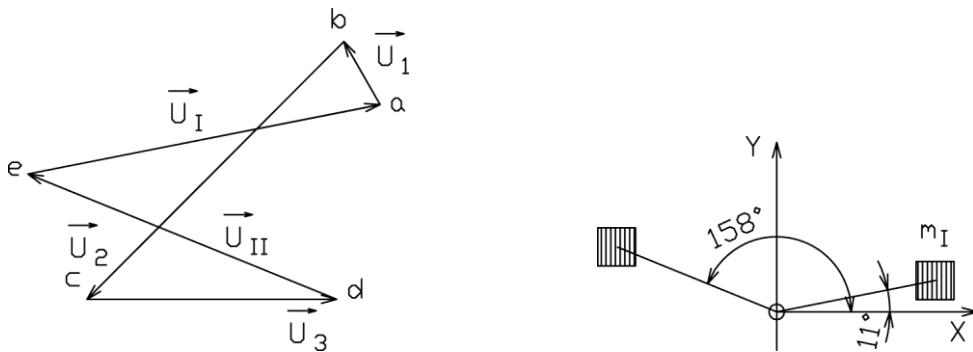
$$m_{II} = \frac{12400}{30800} = 0,40 \text{ kg}.$$

Nakon poznate mase  $m_{II}$  može se odrediti intenzitet vektora  $U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = 0,40 \cdot 110 = 44 \text{ kgmm}$  i nacrtati zatvoreni poligon vektora  $\vec{U}$  sa usvojenom razmerom  $U_U = \frac{10 \text{ kgmm}}{10 \text{ mm}}$ . Iz poligona vektora  $\vec{U}$  dobija se da je

$$U_I = \bar{e}a \cdot U_U = 48 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ kgmm}}{10 \text{ mm}} = 48 \text{ kgmm} = m_I \cdot 110 \text{ mm}$$

$$\text{odakle je } m_I = \frac{48 \text{ kgmm}}{110 \text{ mm}} = 0,43 \text{ kg}$$

Vrednosti uglova položaja korekcionih masa dobijaju se merenjem i iznose  $\varphi_I = 11^\circ$  i  $\varphi_{II} = 158^\circ$ .

**Rešenje zadatka-Analitička metoda**

Uslovi ravnoteže su:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{M}_{iR} = \sum m_i (\vec{L}_i \times \vec{r}_i) = 0$$

Iz drugog uslova ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za tačku E na korekcionoj ravni II jednak nuli imamo razvijeni oblik:

$$-m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II} + m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3 = 0$$

$$-m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_{II} \cdot L_{II} \cdot z_{II} + m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3 = 0$$

Komponente radijus vektora masa po osama „y<sub>i</sub>“ i „z<sub>i</sub>“ su:

$$y_1 = r_1 \cdot \sin 120^\circ = 80 \text{ mm} \cdot 0,866 = 69,28 \text{ mm},$$

$$y_2 = r_2 \cdot \sin 225^\circ = 120 \text{ mm} \cdot (-0,707) = -84,85 \text{ mm},$$

$$y_3 = r_3 \cdot \sin 0^\circ = 55 \text{ mm} \cdot 0 = 0 \text{ mm},$$

$$z_1 = r_1 \cdot \cos 120^\circ = 80 \cdot (-0,5) = -40 \text{ mm},$$

$$z_2 = r_2 \cdot \cos 225^\circ = 120 \text{ mm} \cdot (-0,707) = -84,85 \text{ mm},$$

$$z_3 = r_3 \cdot \cos 0^\circ = 55 \text{ mm} \cdot 0 = 55 \text{ mm}.$$

Ugao radijus vektora korekcione mase II:

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{Y_{II}}{Z_{II}} = \frac{m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II}}{m_I \cdot L_I \cdot z_I} = \frac{m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot y_3}{m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot z_3},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{0,12 \cdot 150 \cdot 69,28 - 0,4 \cdot 100 \cdot (-84,85) - 0,6 \cdot 430 \cdot 0}{0,12 \cdot 150 \cdot (-40) - 0,4 \cdot 100 \cdot (-84,85) - 0,6 \cdot 430 \cdot 55},$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{1247,04 + 3433,6 + 0}{-720 + 3433,6 - 14190} = \frac{4680,64}{-11476,4} = -0,408,$$

odakle je  $\varphi_{II} = -22,18^\circ \Rightarrow \varphi_I = 180^\circ - 22,18^\circ = 157,82^\circ$ .

Sledi da je

$$m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II} = 4680,64 \text{ kgmm}^2,$$

$$m_{II} \cdot 280 \text{ mm} \cdot 41,52 \text{ mm} = 4680,64 \text{ kgmm}^2,$$

$$m_{II} = \frac{4680,64 \text{ kgmm}^2}{280 \text{ mm} \cdot 41,52 \text{ mm}} = 0,4 \text{ kg},$$

$$y_{II} = r_{II} \cdot \sin 157,82^\circ = 110 \text{ mm} \cdot 0,377 = 41,52 \text{ mm},$$

$$z_{II} = r_{II} \cdot \cos 157,82^\circ = 110 \text{ mm} \cdot (-0,926) = -101,86 \text{ mm}.$$

Skalarni oblik prvog uslova ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli ( $\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = 0$ ) je:

$$Y_{IR} = \sum m_i \cdot y_i = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + m_I \cdot y_I + m_{II} \cdot y_{II} = 0,$$

$$Z_{IR} = \sum m_i \cdot z_i = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + m_I \cdot z_I + m_{II} \cdot z_{II} = 0.$$

Ugao radijus vektora korekcione mase I:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{Y_I}{Z_I} = \frac{m_I \cdot y_I}{m_I \cdot z_I}$$

Iz ove jednačine imamo da je:

$$m_I \cdot y_I = -m_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot y_3 - m_{II} \cdot y_{II} = \\ -0,4 \cdot 41,52 - 0,12 \cdot 69,28 - 0,4 \cdot (-84,85) - 0,6 \cdot 0 = 9,022 \text{ kgmm.}$$

Iz prethodne jednačine imamo da je:

$$m_I \cdot z_I = -m_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot z_3 - m_{II} \cdot z_{II} = \\ -0,4 \cdot (-101,86) - 0,12 \cdot (-40) - 0,4 \cdot (-84,85) - 0,6 \cdot 55 = 46,48 \text{ kgmm}$$

Sledi da je:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{Y_I}{Z_I} = \frac{m_I \cdot y_I}{m_I \cdot z_I} = \frac{9,022 \text{ kgmm}}{46,48 \text{ kgmm}} = 0,194, \text{ odakle je}$$

$\varphi_I = 10,98^\circ$ . Ukupna vrednost ugla  $\varphi_I$  prema predznacima  $Y_I$  i  $Z_I$  je  $10,98^\circ$ ,

Radijus vektora mase  $m_{II}$  po osama "y<sub>II</sub>" i "z<sub>II</sub>" su

$$y_{II} = r_{II} \cdot \sin \varphi_{II} = 110 \cdot \sin 10,98^\circ = 110 \cdot 0,19 = 20,95 \text{ mm},$$

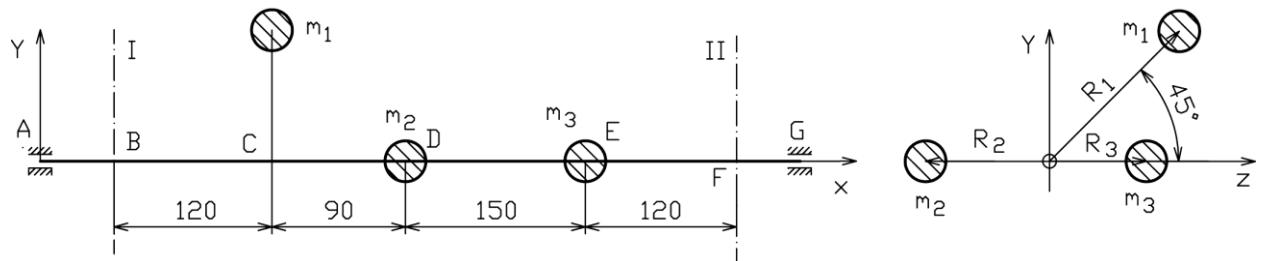
$$z_{II} = r_{II} \cdot \cos \varphi_{II} = 110 \cdot \cos 10,98^\circ = 110 \cdot 0,98 = 107,98 \text{ mm}.$$

Iz jednačina sledi da je  $m_{II} \cdot z_{II} = 9,267 \text{ kgmm}$ , odakle je

$$m_I = \frac{9,022 \text{ kgmm}}{20,96 \text{ mm}} = 0,43 \text{ kg}.$$

### Zadatak 7.5.

Dinamički uravnotežiti neuravnotežene mase rotora u dve korekcione ravni I i II. Neuravnotežene mase su:  $m_1 = 0,25 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,33 \text{ kg}$ ,  $m_3 = 0,45 \text{ kg}$ . Radijusi na kojima se nalaze neuravnotežene mase su:  $r_1 = 50 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 65 \text{ mm}$  i  $r_3 = 75 \text{ mm}$ . Radijus mase  $m_I$  kojom će uravnotežiti rotor je  $r_I = 75 \text{ mm}$ , a masa na II korekcionoj ravni je  $m_{II} = 0,18 \text{ kg}$ . Odrediti korekcionu masu  $m_I$  i radijus druge korekcione ravni  $r_{II}$  i njihove položaje.



#### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Uslovi ravnoteže su:

$$\vec{F}_{IR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{M}_{IR} = \sum m_i (\vec{L}_i \times \vec{r}_i) = 0$$

Na osnovu prve jednačina ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli imamo:

$$\sum m_i \cdot \vec{r}_i = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + m_I \cdot \vec{r}_I + m_{II} \cdot \vec{r}_{II} = 0$$

Članovi iz ove jednačine su vektori u pravcu i smeru radijusa vektora pojedinih masa. Ako se

označi sa:  $\vec{U}_1 = m_1 \cdot \vec{r}_1$ ,  $\vec{U}_2 = m_2 \cdot \vec{r}_2$  itd. oblik jednačine je:

$$\vec{F}_{IR} = \sum \vec{U}_i = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 + \vec{U}_I + \vec{U}_{II} = 0$$

Intenziteti vektora  $U$  su:

$$U_1 = m_1 \cdot r_1 = 0,25 \cdot 50 = 12,5 \text{ kgmm},$$

$$U_2 = m_2 \cdot r_2 = 0,33 \cdot 65 = 21,45 \text{ kgmm},$$

$$U_3 = m_3 \cdot r_3 = 0,45 \cdot 75 = 33,75 \text{ kgmm},$$

$$U_{II} = m_{II} \cdot r_{II},$$

$$U_I = m_I \cdot r_I = 75 \text{ mm} \cdot m_I.$$

U slučaju uslova ravnoteže sila nepoznate su dve veličine ( $\vec{U}_I$  i  $\vec{U}_{II}$ ) te koristimo drugi uslov ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za bilo koju tačku (usvajamo za ravan I), tj. za tački B jednak nuli, te je:

$$\sum \vec{M}_{i(I)} = m_1(\vec{L}_1 \times \vec{r}_1) + m_2(\vec{L}_2 \times \vec{r}_2) + m_3(\vec{L}_3 \times \vec{r}_3) + m_{II}(\vec{L}_{II} \times \vec{r}_{II}) = 0$$

gde su:  $\vec{L}_1, \vec{L}_2, \dots$  (mm) – rastojanja pojedinih neuravnoteženih masa od korekcione ravni I za koju se pisao drugi uslov ravnoteže.

Članovi ove jednačine su vektori koji se rotacijom dovode u pravac radijus vektora pojedinih neuravnoteženih masa.

$$\sum \vec{M}_{i(I)} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3 + \vec{V}_{II} = 0$$

Odrede se intenziteti vektora  $\vec{V}$ , te je

$$V_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot L_1 = 0,25 \cdot 50 \cdot 120 = 1500 \text{ kgmm}^2,$$

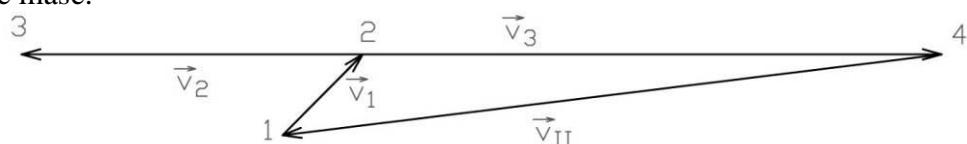
$$V_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot L_2 = 0,33 \cdot 65 \cdot 210 = 4504,5 \text{ kgmm}^2,$$

$$V_3 = m_3 \cdot r_3 \cdot L_3 = 0,45 \cdot 75 \cdot 360 = 12150 \text{ kgmm}^2,$$

$$V_{II} = m_{II} \cdot r_{II} \cdot L_{II} = 0,18 \cdot 480 \cdot r_{II} = r_{II} \cdot 86,4 \text{ mm}^2.$$

Kako u jednačini ima samo jedna nepoznata veličina ( $\vec{V}_{II}$ ) nacrtamo zatvoreni poligon ovih vektora sa usvojenom razmerom  $U_V = \frac{100 \text{ kgmm}^2}{1 \text{ mm}}$ .

Pošto je jednačina za drugi uslov ravnoteže postavljena za korekcionu ravan I (za tačku B,  $\sum \vec{M}_{i(I)}$ ) tada će moment masa sa leve strane od korekcione ravni I biti sa negativnim predznakom, a sa desne sa pozitivnim ili obrnuto. Vektori  $\vec{V}$  sa pozitivnim predznakom crtaju se u smeru radijus vektora te mase, a sa negativnim u suprotnom smeru od radijus vektora te mase.



Iz zatvorenog poligona vektora  $\vec{V}$  dobija se da je:

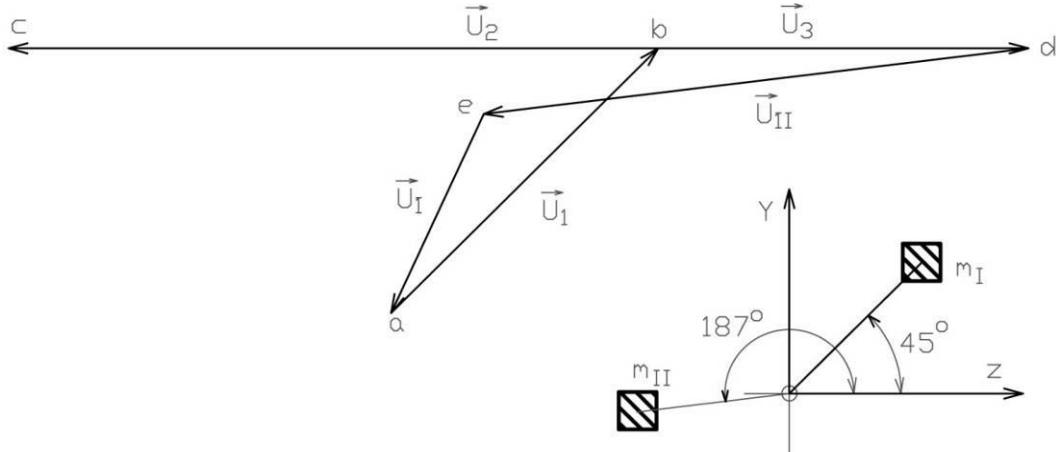
$$V_{II} = r_{II} \cdot 86,4 \text{ kgmm} = \overline{41} \cdot U_V = 87,7 \text{ mm} \cdot \frac{100 \text{ kgmm}^2}{1 \text{ mm}} = 8770 \text{ kgmm}^2$$

$$\text{odakle je } r_{II} = \frac{8770 \text{ kgmm}^2}{86,4 \text{ mm}^2} = 101,5 \text{ mm}.$$

Nakon poznatog poluprečnika  $r_{II}$  može se odrediti intenzitet vektora

$U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = 0,18 \cdot 101,5 = 18,27 \text{ kgmm}$  i nacrtati zatvoreni poligon vektora  $\vec{U}$  sa usvojenom razmerom  $U_U = \frac{10 \text{ kgmm}}{40 \text{ mm}}$ . Iz poligona vektora  $\vec{U}$  dobija se da je  $U_I = \overline{ea} \cdot U_U = 29,25 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ kgmm}}{40 \text{ mm}} = 7,31 \text{ kgmm} = m_I \cdot 75 \text{ mm}$ , odakle je  $m_I = \frac{7,31 \text{ kgmm}}{75 \text{ mm}} = 0,097 \text{ kg}$ .

Vrednosti uglova položaja korekcionih masa dobijaju se merenjem i iznose  $\varphi_I = 245^\circ$  i  $\varphi_{II} = 187^\circ$ .



### Rešenje zadatka-Analitička metoda

Iz drugog uslova ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za korekcionu ravan II jednak nuli imamo da je:

$$\sum \vec{M}_{i(I)} = \omega^2 \sum m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L_i & 0 & 0 \\ 0 & y_i & z_i \end{vmatrix} = 0$$

$$\sum \vec{M}_{i(I)} = \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot y_i \cdot \vec{k} - \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot z_i \cdot \vec{j} = 0$$

S obzirom da je  $\omega \neq 0$ , sledi da je  $\sum m_i \cdot L_i \cdot y_i = 0$  i  $\sum m_i \cdot L_i \cdot z_i = 0$ , a u razvijenom obliku je:

$$m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3 + m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II} = 0,$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3 + m_{II} \cdot L_{II} \cdot z_{II} = 0.$$

Projekcije radijus vektora masa po osama "y<sub>i</sub>" i "z<sub>i</sub>" su:

$$y_1 = r_1 \cdot \sin 45^\circ = 50 \cdot 0,707 = 35,35 \text{ mm},$$

$$y_2 = r_2 \cdot \sin 180^\circ = 65 \cdot 0 = 0 \text{ mm},$$

$$y_3 = r_3 \cdot \sin 0^\circ = 75 \cdot \sin 0^\circ = 0 \text{ mm},$$

$$z_1 = r_1 \cdot \cos 45^\circ = 50 \cdot 0,707 = 35,35 \text{ mm},$$

$$z_2 = r_2 \cdot \cos 180^\circ = 65 \cdot (-1) = -65 \text{ mm},$$

$$z_3 = r_3 \cdot \cos 0^\circ = 75 \cdot \cos 0^\circ = 75 \cdot 1 = 75 \text{ mm}.$$

Ugao radijus vektora korekcione mase I:

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{Y_{II}}{Z_{II}} = \frac{m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II}}{m_{II} \cdot L_{II} \cdot z_{II}} = \frac{-m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot y_3}{-m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot L_3 \cdot z_3}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{-0,25 \cdot 360 \cdot 35,35 - 0,33 \cdot 210 \cdot 0 - 0,45 \cdot 360 \cdot 0}{-0,25 \cdot 120 \cdot 35,35 - 0,33 \cdot 210 \cdot (-65) - 0,45 \cdot 360 \cdot 75} = \frac{-1060,5}{-8706} = 0,12,$$

odakle je  $\varphi_{II} = 6,9^\circ$ . Ukupna vrednost ugla  $\varphi_{II}$  prema predznacima  $Y_{II}$  i  $Z_{II}$  je  $\varphi_{II}=180^\circ+6,9^\circ=186,9^\circ$ .

Radius vektora mase  $m_{II}$  po osama  $y_{II}$  i  $z_{II}$  su

$$Y_{II} = m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II} = -1060,5 = 0,18 \text{ kg} \cdot 480 \cdot y_{II}, \text{ odakle je}$$

$$y_{II} = -12,27 \text{ mm},$$

$$m_{II} \cdot L_{II} \cdot y_{II} = -1060,5,$$

$$y_{II} = r_{II} \cdot \sin \varphi_{II}$$

$$r_{II} = \frac{-12,27 \text{ mm}}{-0,12} = 102,25 \text{ mm},$$

$$z_{II} = r_{II} \cdot \cos \varphi_{II} = 102,25 \cdot \cos 186,9^\circ = -101,5 \text{ mm}.$$

Skalarni oblik prvog uslova ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli je:

$$Y_{iR} = \sum m_i \cdot y_i = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + m_I \cdot y_I + m_{II} \cdot y_{II} = 0$$

$$Z_{iR} = \sum m_i \cdot z_i = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + m_I \cdot z_I + m_{II} \cdot z_{II} = 0$$

Ugao radius vektora korekcione mase II:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{Y_I}{Z_I} = \frac{m_I \cdot y_I}{m_I \cdot z_I}.$$

Iz početne jednačine imamo da je:

$$\begin{aligned} m_I \cdot y_I &= -m_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot y_3 - m_{II} \cdot y_{II} = \\ &= -0,25 \cdot 35,35 - 0,33 \cdot 0 - 0,45 \cdot 0 - 0,18 \cdot (-12,27) \end{aligned}$$

$$m_I \cdot y_I = -6,63 \text{ kgmm}.$$

Sledi da je:

$$\begin{aligned} m_I \cdot z_I &= -m_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot z_3 - m_{II} \cdot z_{II} = \\ &= -0,25 \cdot 35,35 - 0,33 \cdot (-65) - 0,45 \cdot 75 - 0,18 \cdot (-101,5) = \\ &= -8,84 + 21,45 - 33,75 + 18,13 = -3,003 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Sledi da je:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{Y_I}{Z_I} = \frac{m_I \cdot y_I}{m_I \cdot z_I} = \frac{-6,63}{-3,003} = 2,21, \text{ odakle je}$$

Ukupna vrednost ugla  $\varphi_I = 65,62^\circ$  prema predznacima  $Y_I$  i  $Z_I$  je

$$\varphi_I = 180^\circ + 65,62^\circ = 245,62^\circ.$$

Radius vektora mase  $m_I$  po osama  $y_I$  i  $z_I$  su

$$y_I = r_I \cdot \cos 245,62^\circ = 75 \cdot (-0,91) = -68,25 \text{ mm}$$

$$y_I \cdot m_I = -6,63$$

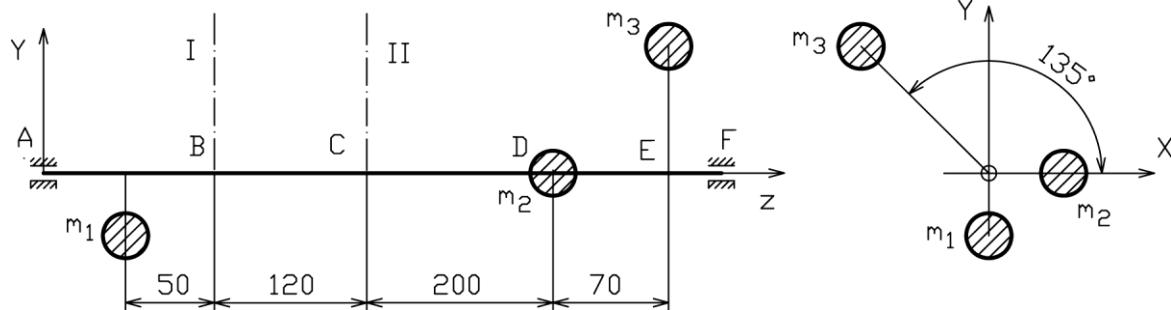
$$y_I = r_I \cdot \cos 245,62^\circ = 75 \cdot (-0,91) = -68,25 \text{ mm}$$

$$y_I \cdot m_I = -6,63 \Rightarrow m_I = \frac{-6,63 \text{ kgmm}}{-68,25 \text{ mm}} = 0,097 \text{ kg}$$

$$z_I = r_I \cdot \cos \varphi_I = 75 \cdot \cos 245,62^\circ = -30,95 \text{ mm}$$

## Zadatak 7.6.

Dinamički uravnotežiti neuravnotežene mase rotora u dve korekcione ravni I i II. Neuravnotežene mase su:  $m_1 = 0,6 \text{ kg}$ ,  $m_2 = 0,2 \text{ kg}$  i  $m_3 = 0,1 \text{ kg}$ . Prečnici na kojima se nalaze neuravnotežene mase su:  $r_1 = 18 \text{ mm}$ ,  $r_2 = 25 \text{ mm}$  i  $r_3 = 20 \text{ mm}$ . Prečnici korekcionih masa su  $r_I = 13 \text{ mm}$  i  $r_{II} = 30 \text{ mm}$ .



### Rešenje zadatka-Grafoanalitička metoda

Uslovi ravnoteže su:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = 0$$

$$\vec{M}_{iR} = \sum m_i (\vec{L}_i \times \vec{r}_i) = 0$$

Na osnovu prve jednačina ravnoteže imamo da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli:

$$\vec{F}_{iR} = \sum m_i \cdot \vec{r}_i = m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2 + m_3 \cdot \vec{r}_3 + m_I \cdot \vec{r}_I + m_{II} \cdot \vec{r}_{II} = 0$$

Članovi iz Jednačine (3) su vektori u pravcu i smeru radijus vektora pojedinih masa. Ako se označi sa:  $\vec{U}_1 = m_1 \cdot \vec{r}_1$ ,  $\vec{U}_2 = m_2 \cdot \vec{r}_2$  itd. oblik jednačine je:

$$\vec{F}_{iR} = \sum \vec{U}_i = \vec{U}_1 + \vec{U}_2 + \vec{U}_3 + \vec{U}_I + \vec{U}_{II} = 0$$

Intenziteti vektora U su:

$$U_1 = m_1 \cdot r_1 = 0,6 \cdot 18 = 10,8 \text{ kgmm},$$

$$U_2 = m_2 \cdot r_2 = 0,2 \cdot 25 = 5 \text{ kgmm},$$

$$U_3 = m_3 \cdot r_3 = 0,1 \cdot 20 = 2 \text{ kgmm},$$

$$U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = 0,30 \text{ mm} \cdot m_{II},$$

$$U_I = m_I \cdot r_I = 13 \text{ mm} \cdot m_I.$$

U slučaju uslova ravnoteže sila nepoznate su dve veličine ( $\vec{U}_I$  i  $\vec{U}_{II}$ ) te koristimo drugi uslov ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za bilo koju tačku (usvajamo tačku B) jednak nuli, te je:

$$\sum \vec{M}_{i(B)} = m_1(\vec{L}_1 \times \vec{r}_1) + m_2(\vec{L}_2 \times \vec{r}_2) + m_3(\vec{L}_3 \times \vec{r}_3) + m_{II}(\vec{L}_{II} \times \vec{r}_{II}) = 0$$

Članovi ove jednačine su vektori koji se rotacijom dovode u pravac radijus vektora pojedinih neuravnoteženih masa.

Odrede se intenziteti vektora  $\vec{V}$ , te je

$$V_1 = m_1 \cdot r_1 \cdot L_1 = 0,6 \cdot 18 \cdot 50 = 540 \text{ kgmm}^2$$

$$V_2 = m_2 \cdot r_2 \cdot L_2 = 0,2 \cdot 25 \cdot 320 = 1600 \text{ kgmm}^2$$

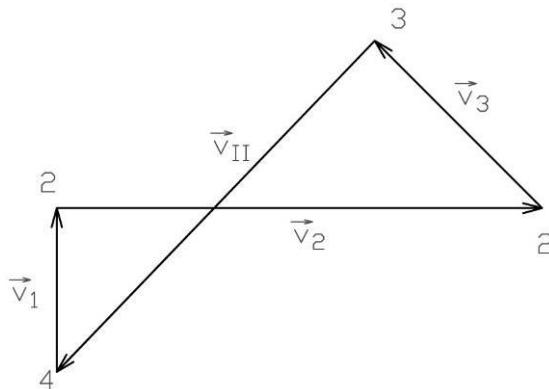
$$V_3 = m_3 \cdot r_3 \cdot L_3 = 0,1 \cdot 20 \cdot 390 = 780 \text{ kgmm}^2$$

$$V_{II} = m_{II} \cdot r_{II} \cdot L_{II} = 30 \cdot 120 \cdot m_{II} = m_{II} \cdot 3600 \text{ mm}^2$$

Kako u jednačini ima samo jedna nepoznata veličina ( $\vec{V}_{II}$ ) nacrtamo zatvoreni poligon ovih

vektora sa usvojenom razmerom  $U_v = \frac{100 \text{ kgmm}^2}{4 \text{ mm}}$ .

Pošto je jednačina za drugi uslov ravnoteže postavljena za korekcionu ravan I (za tačku B) tada će moment masa sa leve strane od korekcione ravnii I biti sa negativnim predznakom, a sa desne sa pozitivnim ili obrnuto. Vektori  $\vec{V}$  sa pozitivnim predznakom crtaju se u smeru radijusa vektora te mase, a sa negativnim u suprotnom smeru od radijusa vektora te mase. U ovom primeru usvojeno je da momenti masa sa leve strane od korekcione ravnii I budu sa negativnim predznakom, a ostali vektori su pozitivnog smera te se crtaju u pravcu njihovih radijusa vektora.



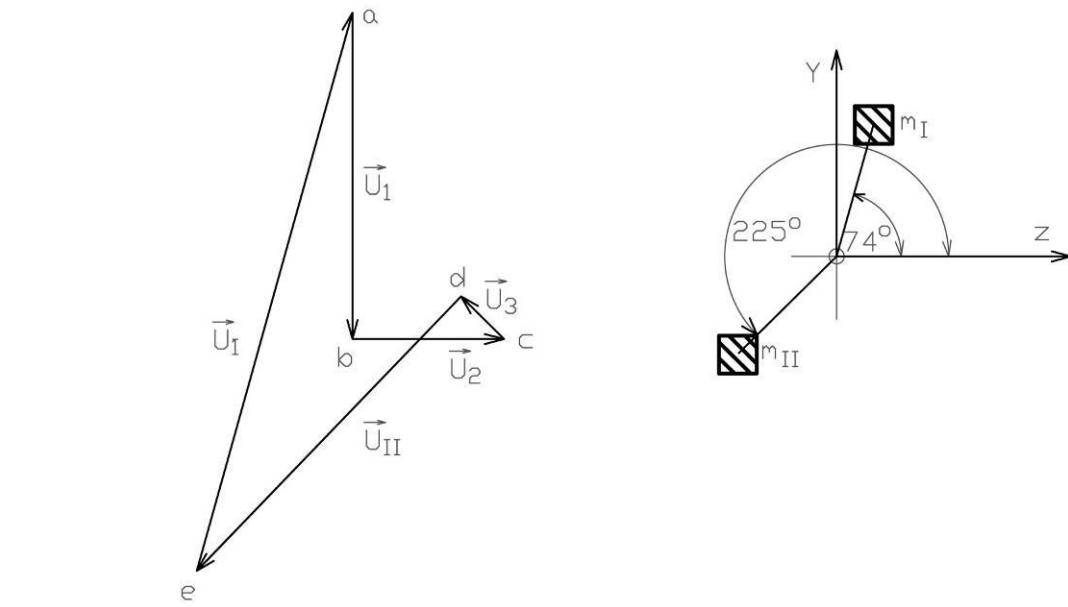
Iz zatvorenog poligona vektora  $\vec{V}$  dobija se da je:

$$V_{II} = m_{II} \cdot 3600 \text{ kgmm} = \overline{41} \cdot U_v = 60,54 \text{ mm} \cdot \frac{100 \text{ kgmm}^2}{4 \text{ mm}} = 1513,5 \text{ kgmm}^2$$

$$\text{odakle je } m_{II} = \frac{1513,5 \text{ kgmm}^2}{3600 \text{ mm}^2} = 0,42 \text{ kg}.$$

Nakon određivanja mase kontratega  $m_{II}$  može se odrediti intenzitet vektora  $U_{II} = m_{II} \cdot r_{II} = 0,42 \cdot 30 = 12,6 \text{ kgmm}$  i nacrtati zatvoreni poligon vektora  $\vec{U}$  sa usvojenom razmerom  $U_U = \frac{10 \text{ kgmm}}{40 \text{ mm}}$ . Iz poligona vektora  $\vec{U}$  dobija se da je  $U_I = \overline{ea} \cdot U_U = 76,7 \text{ mm} \cdot \frac{10 \text{ kgmm}}{40 \text{ mm}} = 19,17 \text{ kgmm} = m_I \cdot 13 \text{ mm}$ , odakle je  $m_I = \frac{19,17 \text{ kgmm}}{13 \text{ mm}} = 1,47 \text{ kg}$ .

Vrednosti uglova položaja korekcionih masa dobijaju se merenjem i iznose  $\varphi_I = 74^\circ$  i  $\varphi_{II} = 225^\circ$ .



### Rešenje zadatka-Analitička metoda

Iz drugog uslova ravnoteže da je zbir momenata svih inercijalnih sila za tačku na korekcionoj ravni II jednak nuli imamo da je:

$$\sum \vec{M}_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ L_i & 0 & 0 \\ 0 & y_i & z_i \end{vmatrix} = 0$$

$$\sum M_{i(II)} = \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot y_i \cdot \vec{k} - \omega^2 \sum m_i \cdot L_i \cdot z_i \cdot \vec{j} = 0.$$

U razvijenom obliku je:

$$m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3 + m_I \cdot L_I \cdot y_I = 0,$$

$$m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3 + m_I \cdot L_I \cdot z_I = 0.$$

Komponente radijus vektora masa po osama "y<sub>i</sub>" i "z<sub>i</sub>" su:

$$y_1 = r_1 \cdot \sin 270^\circ = 18 \text{ mm} \cdot (-1) = -18 \text{ mm},$$

$$y_2 = r_2 \cdot \sin 0^\circ = 25 \text{ mm} \cdot 0 = 0 \text{ mm},$$

$$y_3 = r_3 \cdot \sin 135^\circ = 20 \text{ mm} \cdot 0,707 = 14,14 \text{ mm},$$

$$z_1 = r_1 \cdot \cos 270^\circ = 18 \cdot 0 = 0 \text{ mm},$$

$$z_2 = r_2 \cdot \cos 0^\circ = 25 \text{ mm} \cdot 1 = 25 \text{ mm},$$

$$z_3 = r_3 \cdot \cos 135^\circ = 20 \text{ mm} \cdot (-0,707) = -14,14 \text{ mm}.$$

Ugao radijus vektora korekcione mase I:

$$\tan \varphi_I = \frac{Y_I}{Z_I} = \frac{m_I \cdot L_I \cdot y_I}{m_I \cdot L_I \cdot z_I} = \frac{-m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3}{-m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3},$$

jer je iz jednačine  $m_I \cdot L_I \cdot y_I = -m_1 \cdot L_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot y_3$ , a iz jednačine je

$$m_I \cdot L_I \cdot z_I = -m_1 \cdot L_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot L_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot L_3 \cdot z_3,$$

$$\tan \varphi_I = \frac{-0,6 \cdot 170 \cdot (-18) + 0,2 \cdot 200 \cdot 0 + 0,1 \cdot 270 \cdot 14,14}{-0,6 \cdot 170 \cdot 0 + 0,2 \cdot 200 \cdot 25 + 0,1 \cdot 270 \cdot (-14,14)} = 3,58.$$

odakle je  $\varphi_I = 74,42^\circ$ .

Radius vektora mase  $m_I$  po osama "  $y_I$  " i "  $z_I$  " su

$$y_I = r_I \cdot \sin \varphi_I = 13 \cdot \sin 74,42^\circ = 12,52 \text{ mm},$$

$$z_I = r_I \cdot \cos \varphi_I = 13 \cdot \cos 74,42^\circ = 3,49 \text{ mm}.$$

Iz prethodnih jednačina sledi da je

$$Y_I = m_I \cdot L_I \cdot y_I = 2217,78 = m_I \cdot 120 \cdot 12,52, \text{ odakle je}$$

$$m_I = \frac{2217,78}{120 \cdot 12,52} = 1,47 \text{ kg}.$$

Skalarni oblik prvog uslova ravnoteže da je zbir svih inercijalnih sila jednak nuli ( $\vec{F}_{iR} = \sum \vec{m}_i \cdot \vec{r}_i = 0$ ) je:

$$Y_{iR} = \sum m_i \cdot y_i = m_1 \cdot y_1 + m_2 \cdot y_2 + m_3 \cdot y_3 + m_I \cdot y_I + m_{II} \cdot y_{II} = 0$$

$$Z_{iR} = \sum m_i \cdot z_i = m_1 \cdot z_1 + m_2 \cdot z_2 + m_3 \cdot z_3 + m_I \cdot z_I + m_{II} \cdot z_{II} = 0$$

Ugao radius vektora korekciona mase II:

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{Y_{II}}{Z_{II}} = \frac{m_{II} \cdot y_{II}}{m_{II} \cdot z_{II}}$$

Sledi da je:

$$\begin{aligned} m_{II} \cdot y_{II} &= -m_1 \cdot y_1 - m_2 \cdot y_2 - m_3 \cdot y_3 - m_I \cdot y_I = \\ &= -0,6 \cdot (-18) - 0,2 \cdot 0 - 0,1 \cdot 14,14 - 1,47 \cdot 12,52 = -9,01 \end{aligned}$$

Sledi da je:

$$\begin{aligned} m_{II} \cdot z_{II} &= -m_1 \cdot z_1 - m_2 \cdot z_2 - m_3 \cdot z_3 - m_I \cdot z_I = \\ &= -0,6 \cdot 0 - 0,2 \cdot 25 - 0,1 \cdot (-14,14) - 1,47 \cdot 3,49 = -8,71 \end{aligned}$$

Iz jednačine sledi da je:

$$\operatorname{tg} \varphi_{II} = \frac{Y_{II}}{Z_{II}} = \frac{m_{II} \cdot y_{II}}{m_{II} \cdot z_{II}} = \frac{-9,01}{-8,71} = 1,03, \text{ odakle je}$$

$\varphi_{II} = 45,96^\circ$ . Ukupna vrednost ugla  $\varphi_{II}$  prema predznacima  $Y_{II}$  i  $Z_{II}$  je

$$\varphi_I = 180^\circ + 45,96^\circ = 225,96^\circ$$

Radius vektora mase  $m_{II}$  po osama "  $y_{II}$  " i "  $z_{II}$  " su

$$y_{II} = r_{II} \cdot \sin \varphi_{II} = 30 \cdot \sin 225,96^\circ = -21,43 \text{ mm}$$

$$z_{II} = r_{II} \cdot \cos \varphi_{II} = 30 \cdot \cos 225,96^\circ = -20,85 \text{ mm}$$

Sledi da je

$$m_{II} \cdot y_{II} = -9,01 \text{ kgmm}, \text{ odakle je}$$

$$m_{II} = \frac{-9,01 \text{ kgmm}}{21,43 \text{ mm}} = 0,42 \text{ kg}.$$

## **8. Literatura**

1. Radojka Gligorić. Mehanizmi poljoprivrednih mašina sa rešenim zadacima. Poljoprivredni fakultet Univerzitet u Novom Sadu, 2015.
2. Артоболевский И. И., Теория механизмов и машин, Наука, Москва, 1973.
3. Артоболевский И. И., Механизмы в современной технике, Наука, Москва, 1975.
4. Thom Tremblay. Autodesk Inventor: No experience required, Wiley Publishing, Inc., Indianapolis, Indiana.
5. <http://web.iitd.ac.in/~hirani/Inventor%20Notes.pdf>